MAZE EDUCATIONAL GROUP
ilo
SINCE 1392



ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

# معجزهٔ شب آزمون

## دوازدهم ریاضی

حسابان و ریاضیات پایه. گسسته و آمار و احتمال
هندسه . فیزیک ریاضی . شیمی

SanjeshCloud

MAZE EDUCATIONAL GROUP
ilo
SINCE 1392

# معجزهٔ شب آزمون ilo

## دو هفته درس، یک جـزوه جمع‌بندی!

شـــب آزمونه و نمی‌دونی این‌همه مطلب رو چطور مرور کنی؟
ما مباحث هر دو هفته رو توی یک جـزوه بـرات جمع‌بندی کردیم تا با ذهن مرتب‌تر و خیال راحت‌تر آزمون بدی.

## خوب خوندی؟ جمع بـــــندیش کن!

مطالبی رو که خوندی مرور کن، نکته‌ها رو به هم وصـــل کن و آموخته‌هات رو تثبیت کن.

## کم خوندی؟ فرصت مرور رو از دست نده!

خونده‌هات رو منظم کن و سراغ نکته‌هایی برو که فرصت نکردی مرورشون کنی.

## هنوز شروع نکردی؟ از همین جا شروع کن!

با مرور مباحث و نکته‌های اصلی، قدم اول رو برای جبران عقب‌افتادگی بردار و آماده‌تر سر جلسه برو.

## هرچقدر خوندی، وقتشـــــــه یک قدم آماده‌تر بشـــــی؛ با معجزه شب آزمون مـــــــــاز.

SanjeshCloud

معجزهٔ شب آزمون

# بودجه‌بندی آزمون

## حسابان ۲

**مثلثات**
صفحه‌های ۲۳ تا ۳۴

## هندسهٔ ۳

**ماتریس و کاربردها**
(از ابتدای حل دستگاه معادلات با استفاده از ماتریس وارون تا ابتدای دترمینان و کاربردهای آن)
صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶

## ریاضی پایه

**مثلثات**
ریاضی ۱: صفحه‌های ۲۸ تا ۴۶
حسابان ۱: صفحه‌های ۹۱ تا ۱۰۴

## هندسهٔ پایه

**قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن**
هندسه ۱
صفحه‌های ۳۸ تا ۴۹

## ریاضیات گسسته

**آشنایی با نظریه اعداد**
(از ابتدای بزرگترین مقسوم علیه مشترک تا ابتدای فعالیت)
صفحه‌های ۱۳ تا ۲۲

## فیزیک ۳

**حرکت بر خط راست**
(از ابتدای حرکت با سرعت ثابت تا پایان فصل ۱)
صفحه‌های ۱۳ تا ۲۸

## آمار و احتمال

-

## فیزیک پایه

**کار، انرژی و توان**
صفحه‌های ۵۳ تا ۸۲

## شیمی ۳

**مولکول‌ها در خدمت تندرستی:**
از ابتدای pH تا سر شوینده‌های خورنده (واکنش خنثی شدن)
صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰

## شیمی پایه

**ردپای گازها در زندگی**
(تا انتهای اثر گلخانه‌ای)
صفحه‌های ۴۷ تا ۶۹


## مؤلفین

(ریاضیات: محمد خانگلدی ـ فرهاد فرزامی)
(فیزیک: محمدجواد سورچی)
(شیمی: مجتبی محجوب)


SanjeshCloud

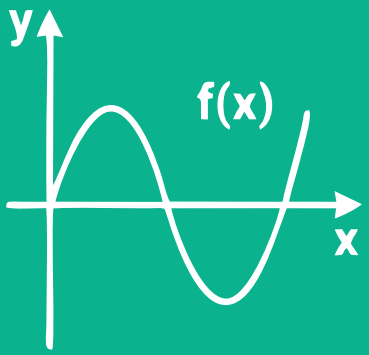
ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

MAZE EDUCATIONAL GROUP
ilo
SINCE 1392

# ریاضیات

دوازدهم ریاضی

# معجزهٔ شب آزمون

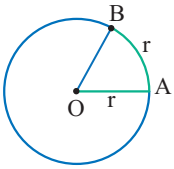



SanjeshCloud

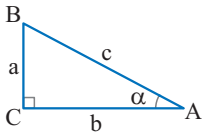
# حسابان ریاضیات پایه

## مثلثات

### واحدهای اندازه‌گیری زاویه

| | |
|---|---|
| ■ **درجه:** اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، زاویهٔ مرکزی هرکدام از این کمان‌ها ۱ درجه است. | ■ **رادیان:** یک رادیان برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی از دایره به طول شعاع دایره.   |
| یک رادیان تقریباً ۵۷ درجه است. | $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\begin{cases}R=\frac{\pi}{180^\circ}D\\ D=\frac{180^\circ}{\pi}R\end{cases}$ رابطهٔ درجه و رادیان |

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:



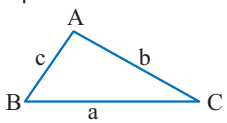

| | |
|---|---|
| $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ | $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ |
| $\tan\alpha=\frac{a}{b}$ | $\cot\alpha=\frac{b}{a}$ |

## نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف

| رادیان | ۰ | $\frac{\pi}{۶}$ | $\frac{\pi}{۴}$ | $\frac{\pi}{۳}$ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\pi$ | $\frac{۳\pi}{۲}$ | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| درجه | $۰^\circ$ | $۳۰^\circ$ | $۴۵^\circ$ | $۶۰^\circ$ | $۹۰^\circ$ | $۱۸۰^\circ$ | $۲۷۰^\circ$ | $۳۶۰^\circ$ |
| Sin | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ | ۰ | $-۱$ | ۰ |
| cos | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | $-۱$ | ۰ | ۱ |
| tan | ۰ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۱ | $\sqrt{۳}$ | ت.ن | ۰ | ت.ن | ۰ |
| cot | ت.ن | $\sqrt{۳}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۰ | ت.ن | ۰ | ت.ن |

## به دست آوردن مساحت مثلث

در هر مثلث اگه طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین اونا رو داشته باشیم به راحتی می‌تونیم مساحت مثلث رو به دست بیاریم:



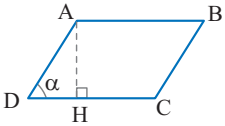

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$$

## مساحت متوازی‌الاضلاع

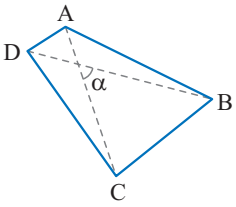
در هر متوازی‌الاضلاع اگر اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها را داشته باشیم، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:




$$S_{\square ABCD} = AH \times DC = AD \times DC \times \sin\alpha$$

**نکته**

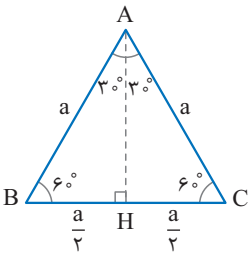
در هر چهار ضلعی، اگر اندازهٔ قطرها و زاویهٔ بین دو قطر را داشته باشیم، مساحت آن برابر است با:




$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin\alpha$$

## مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم

**الف)** در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$، ارتفاع وارد بر هر ضلع، میانه و نیمساز نیز می‌باشد و اندازهٔ آن برابر است با:

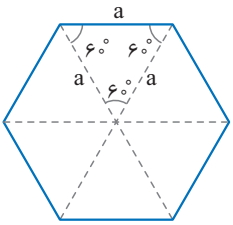



$$\Rightarrow \boxed{AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

**ب)** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$ برابر است با:

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$$

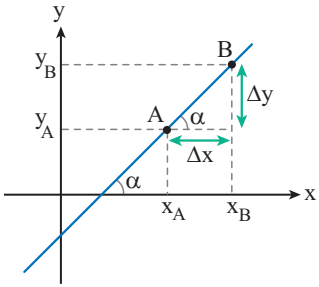
**ج)** با رسم قطرهای بزرگ شش‌ضلعی منتظم به ضلع $a$، شش مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$ پدید می‌آیند؛ بنابراین مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع $a$ برابر است با:



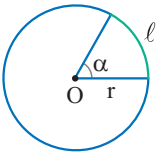
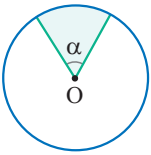
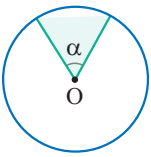

$$\Rightarrow \boxed{S = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$$

## رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خطی که محور افقی (xها) را قطع می‌کند، با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی (xها) برابر است، به عبارت دیگر اگر $\alpha$ زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:




$$\begin{cases} m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \\ \tan\alpha = \dfrac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط} = m = \tan\alpha$$

| اندازهٔ کمان روبه‌رو به زاویهٔ $\alpha$ در دایره | اندازهٔ مساحت قطاع در دایره | اندازهٔ مساحت مثلث در دایره |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\ell = r\alpha$ | $S = \frac{1}{2}r^2\alpha$ | $S = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$ |
| $\alpha$ برحسب رادیان | $\alpha$ برحسب رادیان | |

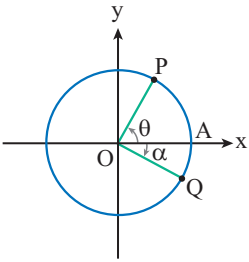






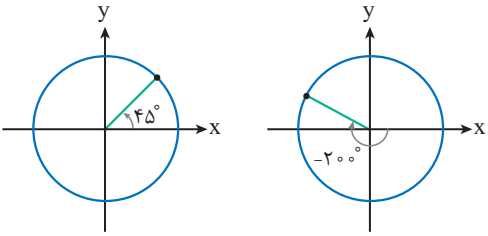
## دایرهٔ مثلثاتی

دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ است. با توجه به شکل زیر، اگر از نقطهٔ A شروع کنیم و روی محیط دایره و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم، زاویه‌های مثبت ایجاد می‌شود و اگر در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم، زوایای منفی تولید می‌شوند. در شکل زیر زاویهٔ $\theta$ زاویه‌ای با علامت مثبت و زاویه $\alpha$، زاویه‌ای با علامت منفی است.



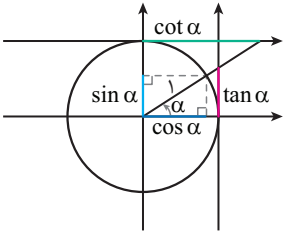

در اینجا محور xها همان محور cosها و محور yها همان محور sinها است.

**مثال** در شکل‌های زیر، زوایای $45^\circ$ و $-200^\circ$ را روی دایره مثلثاتی نشان داده‌ایم:




## علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی

در دایرهٔ مثلثاتی، دو محور عمود بر هم، صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند و هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیهٔ مثلثاتی یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی و محورها، علامت نسبت‌های مثلثاتی را در هریک از نواحی به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم:

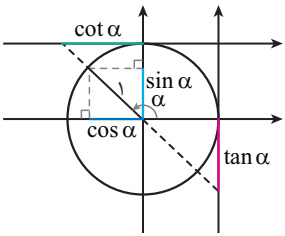



انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ اول

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\sin > 0 \quad \tan > 0$

$\cos > 0 \quad \cot > 0$

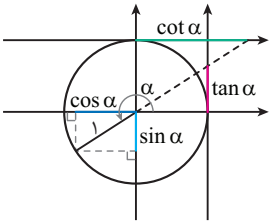



انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ دوم

$$\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi \quad \text{یا} \quad ۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$$

$\sin > ۰$ $\quad \tan < ۰$

$\cos < ۰$ $\quad \cot < ۰$

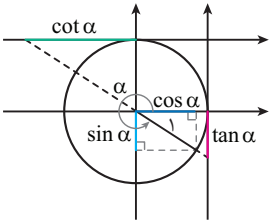



انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ سوم

$$\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad ۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$$

$\sin < ۰$ $\quad \tan > ۰$

$\cos < ۰$ $\quad \cot > ۰$




انتهای کمان $\alpha$ در ناحیهٔ چهارم

$$۳\frac{\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi \quad \text{یا} \quad ۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$$

$\sin < ۰$ $\quad \tan < ۰$

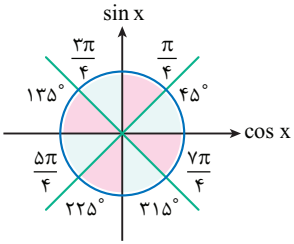
$\cos > ۰$ $\quad \cot < ۰$

به کمک دایرهٔ مثلثاتی می‌توان گفت:

۱) $-۱ \le \sin\theta \le ۱ \ , \ -۱ \le \cos\theta \le ۱$

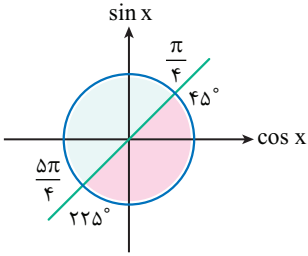
۲) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$




ناحیهٔ صورتی‌رنگ: $\tan x > \cot x$

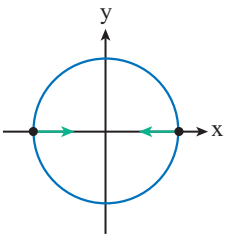
ناحیهٔ سبزرنگ: $\cot x > \tan x$




ناحیهٔ صورتی‌رنگ: $\cos x > \sin x$

ناحیهٔ سبزرنگ: $\sin x > \cos x$

## تبدیل‌های مثلثاتی



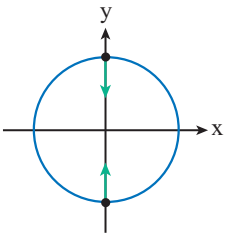

$k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

۱ نام نسبت تغییر نمی‌کند.

۲ علامت با توجه به ناحیه تعیین می‌شود.

$k\pi \pm \alpha$

| | |
|---|---|
| $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ | $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ |
| $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ | $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ |
| $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ | $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ |
| $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$ | $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ |
| $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$ | $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ |
| $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$ | $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ |
| $\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$ | $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ |
| $\cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha$ | $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ |




$\frac{(2k-1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

۱ نام نسبت تغییر می‌کند.

۲ علامت با توجه به ناحیه تعیین می‌شود.

$\frac{(2k-1)\pi}{2} \pm \alpha$

| | |
|---|---|
| $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ | $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ |
| $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ | $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ |
| $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$ | $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ |
| $\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$ | $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$ |
| $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$ | $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$ |
| $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$ | $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$ |
| $\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$ | $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ |
| $\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$ | $\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$ |

**نکته**

نکته: اگر در کمان نسبت‌های مثلثاتی مضارب زوج $\pi$ (مانند $2\pi$، $4\pi$، $6\pi$ و ...) وجود داشته باشه، می‌تونیم اونارو حذف کنیم. (دلیلش هم اینه که وجود مضارب زوج $\pi$ داخل کمان، باعث تولید زوایای هم‌انتها با زاویهٔ اصلی میشه)

$$\sin(\cancel{2\pi}+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\cancel{2\pi}-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\tan(\cancel{1402\pi}-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

**اتحادهای اصلی**

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

**نتایج و اتحادهای فرعی**

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\times\cos\alpha}$$

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$$

## نمودارهای مثلثاتی

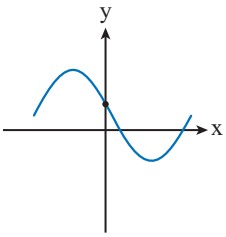
نمودارهای $y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos(bx+c)+d$

| نتایج | بیشترین و کمترین مقدار | دورهٔ تناوب |
|---|---|---|
| $d = \frac{y_{max}+y_{min}}{۲}$<br>$\lvert a\rvert = \frac{y_{max}-y_{min}}{۲}$ | $y_{max} = d+\lvert a\rvert$<br>$y_{min} = d-\lvert a\rvert$ | $T = \frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$ |

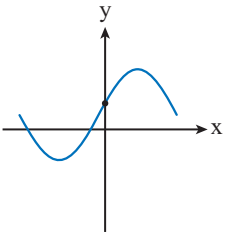
## علامت ضرایب در تابع سینوس و کسینوس

### $y = a\sin bx + c$

$ab < ۰ \Rightarrow$ تابع در $x = ۰$، نزولی است.

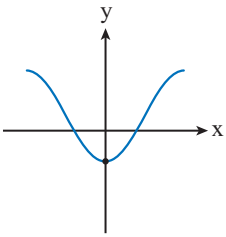



$ab > ۰ \Rightarrow$ تابع در $x = ۰$، صعودی است.

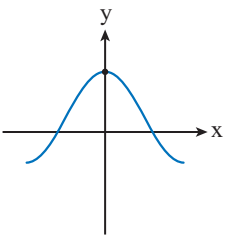



### $y = a\cos bx + c$

$a < ۰ \Rightarrow$ تابع در صفر مینیمم دارد.




$a > ۰ \Rightarrow$ تابع در صفر ماکزیمم دارد.



## تابع تانژانت

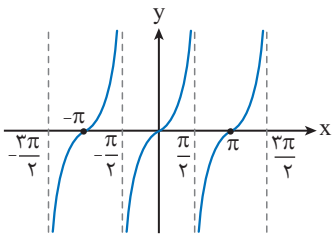
| $\alpha$ در ناحیهٔ اول | $\alpha$ در ناحیهٔ دوم | $\alpha$ در ناحیهٔ سوم | $\alpha$ در ناحیهٔ چهارم |
|---|---|---|---|
| $\tan\alpha > 0$ | $\tan\alpha < 0$ | $\tan\alpha > 0$ | $\tan\alpha < 0$ |

تانژانت در هر ۴ ناحیه در حال افزایش است.

تانژانت در زوایای $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$ تعریف نشده است.

در ناحیهٔ اول و سوم $\sin\alpha < \tan\alpha$

در ناحیهٔ دوم و چهارم $\sin\alpha > \tan\alpha$




۱ فاصلهٔ بین دو خط‌چین متوالی، یک دورهٔ تناوب است.

$$y = \tan bx \longrightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

۲ در محدوده بین دو خط‌چین متوالی، تابع اکیداً صعودی است.

$$\ldots,(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}),(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\ldots$$

۳ در محدوده بین دو خط‌چین متوالی محور xها را قطع می‌کند.

۴ دامنهٔ تابع $y = \tan x$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

۵ برد تابع تانژانت برابر اعداد حقیقی است.

$$-\infty < \tan\alpha < +\infty$$

## هندسهٔ ۳

در دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات باشند، در این‌صورت دستگاه به شکل معادله ماتریسی $AX=B$ نوشته می‌شود. درصورتی‌که ماتریس $A$ وارون‌پذیر باشد ($|A|\neq 0$)، دستگاه دارای جواب است و با ضرب کردن $A^{-1}$ از چپ در معادله، می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \xrightarrow{A^{-1}\times()} A^{-1}AX=A^{-1}B \to IX=A^{-1}B \to X=A^{-1}B$$

**مثال** **در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax-y=-5 \\ -5x+2y=9 \end{cases}$، اگر وارون ماتریس ضرایب به‌صورت $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $3x+ay$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۳

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۴»

$$A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \to A^{-1}=\frac{1}{2a-5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \to a=3$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

و درنتیجه داریم:

$$3x+ay=3(-1)+3(2)=3$$

**بررسی تعداد جواب‌های یک دستگاه دو معادله و دو مجهول:** در یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، هریک از معادله‌ها، معادلهٔ یک خط هستند و تعبیر هندسی حل این دستگاه، یافتن تعداد و مختصات محل برخورد دو خط است. اگر معادلهٔ دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ باشد، ماتریس ضرایب به‌صورت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ است و دو حالت کلی داریم:

۱) اگر $|A|\neq 0$ باشد، دستگاه دارای جواب منحصربه‌فرد است؛ یعنی دو خط متقاطع‌اند بنابراین داریم: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

**۲** اگر $|A|=۰$ باشد، در این‌صورت:

**الف** دستگاه فاقد جواب است؛ یعنی دو خط موازی‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

**ب** دستگاه بی‌شمار جواب دارد؛ یعنی دو خط بر هم منطبق‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

**مثال** **به ازای کدام مقدار $m$، معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}m & ۲\\ ۳ & m+۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+۲\\ ۲\end{bmatrix}$ جواب ندارد؟**

۱) $-۳$ ۲) ۱

۳) $-۶$ ۴) ۲

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۲»

معادلهٔ $\begin{cases}mx+۲y=m+۲\\ ۳x+(m+۵)y=۲\end{cases}$ جواب ندارد، درنتیجه دو خط موازی هستند و داریم:

$$\frac{m}{۳}=\frac{۲}{m+۵}\neq\frac{m+۲}{۲}$$

$$\frac{m}{۳}=\frac{۲}{m+۵}\rightarrow m^{۲}+۵m-۶=۰\rightarrow\begin{cases}m=۱\rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}\neq\frac{۳}{۲} & \checkmark\\ m=-۶\rightarrow\frac{-۶}{۳}=\frac{۲}{-۱}=\frac{-۴}{۲} & \times\end{cases}$$

**دستگاه معادلات همگن:** اگر $c$ و $c'$ در دستگاه دو معادله و دو مجهول صفر باشند، دستگاه را همگن می‌نامیم:

$$\begin{cases}ax+by=۰\\ a'x+b'y=۰\end{cases}$$

دستگاه معادلات همگن همواره دارای جواب بدیهی $(۰,۰)$ است زیرا هر دو خط از مبدأ مختصات عبور می‌کنند.

در دستگاه دو معادله و دو مجهول همگن، دو حالت داریم:

**۱** اگر $|A|\neq۰\ (\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'})$ باشد، دستگاه دارای جواب منحصر به‌فرد $(۰,۰)$ است؛ یعنی دو خط در مبدأ مختصات متقاطع‌اند.

**۲** اگر $|A|=۰\ (\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'})$ باشد، دستگاه غیر از جواب بدیهی $(۰,۰)$، بی‌شمار جواب دیگر نیز دارد؛ یعنی دو خط برهم منطبق‌اند.

**مثال** اگر دستگاه $\begin{cases} mx-۶y=۰ \\ ۲x+۳y=۰ \end{cases}$ دارای جواب غیرصفر باشد، آنگاه وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & m \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۱»

دستگاه همگن چون دارای جواب غیرصفر است، درنتیجه بی‌شمار جواب دارد یعنی:

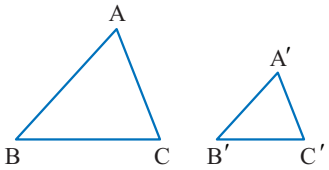
$$\frac{m}{۲}=\frac{-۶}{۳}\rightarrow m=-۴$$

بنابراین داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۵-۴}\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

## هندسهٔ ۱

**تشابه دو مثلث:** دو مثلث را متشابه گویند؛ هرگاه زاویه‌ها برابر و اندازهٔ ضلع‌های متناظر، متناسب باشند.




$$\hat{A}=\hat{A}' \ , \ \hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}'$$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$$

**مثال** مثلثی با اضلاع ۴، ۵، x با مثلثی با اضلاع ۳، ۷، y متشابه است. اختلاف کمترین و بیشترین مقادیر ممکن برای y کدام است؟

۱) ۶/۳۵ ۲) ۷/۲ ۳) ۲/۸ ۴) ۳/۱۵

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۴»

می‌دانیم $۷-۳<y<۷+۳$ یعنی $۴<y<۱۰$.

دو مثلث متشابه‌اند، درنتیجه طول ضلع‌ها متناسب هستند و ۴ حالت زیر را داریم:

$$\frac{۴}{۳}=\frac{۵}{y}=\frac{x}{۷}\rightarrow y=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵ \quad \text{غ ق ق}$$

$$\frac{۴}{۷}=\frac{۵}{y}=\frac{x}{۳}\rightarrow y=\frac{۳۵}{۴}=۸/۷۵$$

$$\frac{۴}{y}=\frac{۵}{۳}=\frac{x}{۷}\rightarrow y=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴ \quad \text{غ ق ق}$$

$$\rightarrow ۸/۷۵-۵/۶=۳/۱۵$$

$$\frac{۴}{y}=\frac{۵}{۷}=\frac{x}{۳}\rightarrow y=\frac{۲۸}{۵}=۵/۶$$

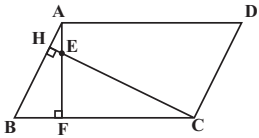
### حالت‌های تشابه دو مثلث

۱ (زز): اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۲ (ض ز ض): اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

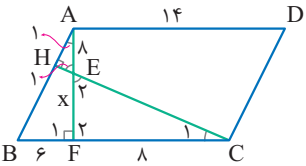
۳ (ض ض ض): اگر اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

**مثال** در متوازی‌الاضلاع زیر، اگر $AD=۱۴$، $BF=۶$ و $AE=۸$ باشد، اندازهٔ ارتفاع AF کدام است؟




۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۴

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۲»



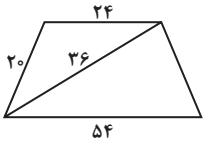

$$\left.\begin{matrix}\hat{E}_۱=\hat{E}_۲\\ \hat{H}=\hat{F}_۲\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\\ \hat{F}_۱=\hat{F}_۲\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\triangle ABF\sim\triangle CFE\rightarrow\frac{BF}{EF}=\frac{AF}{FC}\rightarrow\frac{۶}{x}=\frac{۸+x}{۸}$$

$$\rightarrow x^۲+۸x-۴۸=۰\rightarrow(x+۱۲)(x-۴)=۰\begin{cases}x=-۱۲ \times\\ x=۴\end{cases}$$

و درنتیجه داریم:

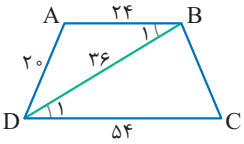
$$AF=AE+EF=۸+۴=۱۲$$

**مثال** محیط ذوزنقه مقابل کدام است؟




۱) ۷۲ ۲) ۱۲۸
۳) ۱۴۴ ۴) ۶۴

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۲»



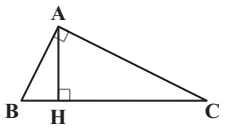

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب BD}} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \frac{۲۴}{۳۶} = \frac{۳۶}{۵۴} \rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض زض}} \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{BDC}$$

$$\rightarrow \frac{\overset{۲۰}{\cancel{AD}}}{BC} = \frac{۲}{۳} \rightarrow BC = ۳۰$$

و درنتیجه محیط ذوزنقه برابر است با:

$$۲۴+۲۰+۵۴+۳۰=۱۲۸$$

**روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:** در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A}=۹۰)$ با رسم ارتفاع وارد بر وتر AH، سه مثلث متشابه $(\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC})$ ایجاد می‌شود که روابط طولی زیر در آن برقرار است:



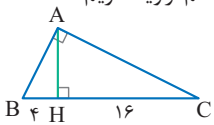

۱) $AB^۲ = BH \times BC$
۲) $AC^۲ = CH \times BC$
۳) $AH^۲ = BH \times CH$
۴) $AH \times BC = AB \times AC$

**مثال** در مثلث قائم‌الزاویه ABC، نقطهٔ H، پای ارتفاع وارد بر وتر است. اگر طول وتر ۲۰ و کمترین فاصله H از رأس‌های مجاورش ۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمه این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) ۲
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۳

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۲»

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



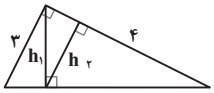

$$AB^{۲} = BH \times BC = ۴ \times ۲۰ \rightarrow AB = ۴\sqrt{۵}$$
$$AC^{۲} = CH \times BC = ۱۶ \times ۲۰ \rightarrow AC = ۸\sqrt{۵}$$

و درنتیجه:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{۸\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۵}} = ۲$$

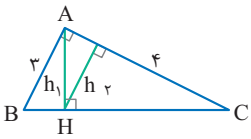
**کاربرد تشابه:** هرگاه دو مثلث با نسبت تشابه $k$ متشابه باشند، نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) آن‌ها برابر $k$ و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $k^{۲}$ است.

**مثال** در شکل زیر $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟




۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۲»




$$\overset{\triangle}{ABC} : BC^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} \rightarrow BC = ۵$$
$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ACH} \rightarrow k = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$
$$\rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = k = \frac{۴}{۵}$$

**مثال** **اندازه اضلاع یک مثلث ۶، ۸ و ۱۰ است. مثلث دیگری را متشابه با مثلث اول که اندازه یک ضلع آن ۱۲ است در نظر می‌گیریم. کمترین مساحت مثلث دوم کدام است؟**

۱) ۳۲/۲۵
۲) ۳۴/۵۶
۳) ۳۴/۷۵
۴) ۳۰/۷۵

**پاسخ مثال** گزینهٔ «۲»

کمترین مساحت مثلث دوم وقتی است که ضلع ۱۲ بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد، درنتیجه:

$$k=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۵}{۶}\rightarrow\frac{S}{S'}=k^{۲}=\frac{۲۵}{۳۶}\rightarrow\frac{\frac{۶\times۸}{۲}}{S'}=\frac{۲۵}{۳۶}\rightarrow S'=۳۴/۵۶$$

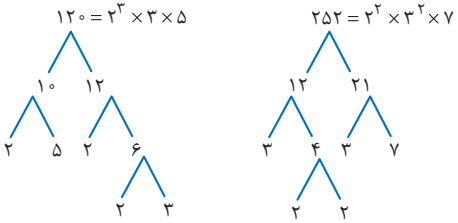
## گسسته

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد: در بین مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد صحیح a و b بزرگ‌ترین آن‌ها را به اختصار ب.م.م a و b می‌گوییم. اگر ب.م.م دو عدد a و b، برابر عدد طبیعی d باشد، می‌نویسیم:

$$\begin{cases}d|a,d|b\\ \forall m>۰,m|a,m|b\Rightarrow m\le d\end{cases}\Leftrightarrow(a,b)=d$$

برای محاسبهٔ ب.م.م دو عدد صحیح a و b کافی است دو عدد را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با توان کمتر را به عنوان ب.م.م در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال ب.م.م دو عدد ۱۲۰ و ۲۵۲ برابر است با:

$$(۲۵۲,۱۲۰)=۲^{۲}\times۳=۱۲$$



## نکته

۱ ب.م.م دو عدد صحیح a و b بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از آن دو عدد می‌توان فاکتور گرفت. به عنوان مثال:

$۱۲۰ = \underline{۱۲} \times ۱۰$

$۲۵۲ = \underline{۱۲} \times ۲۱$

۲ در محاسبهٔ ب.م.م دو عدد، اگر بتوانیم عامل مشترکی را فاکتور بگیریم، از آن عامل مشترک فاکتور گرفته و ب.م.م دو عدد باقی‌مانده را محاسبه کرده و در آن عامل مشترک ضرب می‌کنیم. $(ka,kb)=|k|(a,b)$

به‌عنوان مثال:

$$(۱۵۰,۲۴۰)=(۱۰\times ۱۵,۱۰\times ۲۴)=۱۰(\underset{۳\times ۵}{۱۵},\underset{۳\times ۲^{۳}}{۲۴})=۱۰\times ۳=۳۰$$

۳ علامت دو عدد a و b در ب.م.م آن‌ها تأثیری ندارد.

$$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)=d$$

۴ $(a,b)=d \Rightarrow (a^n,b^n)=d^n$

۵ ب.م.م دو عدد صحیح a و صفر برابر $|a|$ است.

$(a,۰)=|a|$

۶ اگر عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش‌پذیر باشد، ب.م.م دو عدد a و b برابر $|a|$ است.

$a \mid b \Rightarrow (a,b)=|a|$

به‌عنوان مثال: $۱۲ \mid -۳۶ \Rightarrow (۱۲,-۳۶)=۱۲$

۷ در محاسبهٔ ب.م.م دو عدد a و b، به هر یک از اعداد می‌توان هر مضرب دلخواهی از عدد دیگر را اضافه یا کم کرد.

$(a,b)=(a,ak+b)=(a+k'b,b)$

۸ اگر عددی دو عدد a و b را عاد کند، ب.م.م آن دو عدد را نیز عاد می‌کند و بالعکس.

$k \mid a \wedge k \mid b \Leftrightarrow k \mid (a,b)$

۹ مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد a و b همان مقسوم علیه‌های ب.م.م آن دو عدد است.

۱۰ اگر ب.م.م دو عدد a و b برابر ۱ باشد، یعنی دو عدد a و b عامل مشترکی نداشته باشند، می‌گوییم دو عدد a و b نسبت به هم اول یا مُتباین هستند.

**نکته**

$a$ و $b$ نسبت به هم اول هستند $\Leftrightarrow (a,b)=1$

معروف‌ترین اعدادی که نسبت به هم اول هستند:

۱ هر دو عدد اول متمایز و هر توانی از آن‌ها نسبت به هم اول هستند.

$p_1, p_2$ اعداد اول $(p_1 \neq p_2)$ و $m$ و $n$ اعداد طبیعی هستند:

$\Rightarrow (p_1,p_2)=1 \Rightarrow (p_1^n, p_2^m)=1$

۲ هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول هستند. $(n+1,n)=1$

۳ هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند. $(2n+1,2n+3)=1$

۴ تمام اعداد صحیح و $\pm 1$ نسبت به هم اول هستند. $(a,\pm 1)=1$

۵ هر توان طبیعی از ۲ و اعداد فرد نسبت به هم اول هستند. $(2^n,2k+1)=1$

**نکته**

۱ اگر دو عدد $a$ و $b$ نسبت به هم اول باشند، هر توانی از آن‌ها نسبت به هم اول هستند.

$(a,b)=1 \Rightarrow (a^n,b^m)=1$

۲ $(a,b)=1 \wedge (a,c)=1 \Rightarrow (a,bc)=1$

## محاسبهٔ ب.م.م دو عبارت پارامتری

**روش اول** اگر بخواهیم ب.م.م دو عبارت پارامتری که معمولاً برحسب $n$ هستند را محاسبه کنیم، کافی است ب.م.م آن‌ها را $d$ فرض کنیم و چون $d$ هر دو عبارت پارامتری را عاد می‌کند، کافی است از سمت راست، رابطهٔ عاد کردن $n$ را حذف کنیم و به رابطهٔ $d \mid \underset{\text{عدد}}{\downarrow k}$ برسیم. به‌عنوان مثال ب.م.م دو عبارت $5n-1$ و $3n+2$ که نسبت به هم اول نیستند را محاسبه می‌کنیم:

$(3n+2,5n-1)=d$

$$\begin{cases} d \mid 5n-1 \\ d \mid 3n+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 3(5n-1) \\ d \mid 5(3n+2) \end{cases} \Rightarrow d \mid (15n+10)-(15n-3)$$

$$\Rightarrow d \mid 13 \xrightarrow{d \neq 1} d=13$$

**روش دوم**

$(3n+2,5n-1)=d$

$$\begin{cases} d \mid 5n-1 \\ d \mid 3n+2 \end{cases} \Rightarrow 5n-1=0 \Rightarrow n=\frac{1}{5} \Rightarrow d \mid \underset{\downarrow \frac{1}{5}}{3n+2} \Rightarrow d \mid \frac{3}{5}+2$$

$$\Rightarrow d \mid \frac{13}{5} \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d=13$$

**کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد:** در بین مضارب مشترک دو عدد صحیح a و b، کوچک‌ترین آن‌ها را به اختصار ک.م.م a و b می‌گوییم.

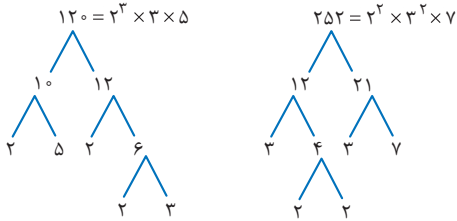
اگر ک.م.م دو عدد a و b برابر عدد طبیعی c باشد، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a \mid c \ , \ b \mid c \\ \forall m > 0 \ , \ a \mid m \ , \ b \mid m \Rightarrow c \leq m \end{cases} \Leftrightarrow [a,b] = c$$

برای محاسبهٔ ک.م.م دو عدد صحیح a و b کافی است دو عدد را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر در عوامل غیرمشترک را به‌عنوان ک.م.م در نظر می‌گیریم.

به‌عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۱۲۰ و ۲۵۲ برابر است با:

$$[۲۵۲,۱۲۰] = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷ = ۲۵۲۰$$




**• نکته •**

۱ ک.م.م دو عدد صحیح a و b کوچک‌ترین عدد صحیحی است که بر دو عدد بخش‌پذیر است. به عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۱۲۰ و ۲۵۲ برابر ۲۵۲۰ است؛ یعنی ۲۵۲۰ کوچک‌ترین عدد صحیحی است که هم بر ۱۲۰ و هم بر ۲۵۲ بخش‌پذیر است.

۲ در محاسبهٔ ک.م.م دو عدد اگر بتوانیم عامل مشترکی را فاکتور بگیریم، از آن عامل مشترک فاکتور گرفته و ک.م.م دو عدد باقی‌مانده را محاسبه کرده و در آن عامل مشترک ضرب می‌کنیم.

$$[ka,kb] = |k|[a,b]$$


SanjeshCloud

**مثال**

$$[۱۵۰,۲۴۰]=[۱۰\times۱۵,۱۰\times۲۴]=۱۰\begin{bmatrix}۱۵ , & ۲۴\\ \downarrow & \downarrow\\ ۳\times۵ & ۳\times۲^۳\end{bmatrix}$$

$$=۱۰\times(۳\times۲^۳\times۵)=۱۲۰۰$$

**۳** علامت دو عدد a و b در ک.م.م آن‌ها تأثیری ندارد.

$$[a,b]=[-a,b]=[a,-b]=[-a,-b]=c$$

**۴**

$$[a,b]=c\Rightarrow\left[a^n,b^n\right]=c^n$$

**۵** اگر عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش‌پذیر باشد، ک.م.م دو عدد a و b برابر $|b|$ است.

$$a\mid b=[a,b]=|b|$$

به‌عنوان مثال: $۱۲\mid-۳۶\Rightarrow[۱۲,-۳۶]=۳۶$

**۶** اگر دو عدد a و b عددی را عاد کنند، ک.م.م a و b نیز آن عدد را عاد می‌کند و بالعکس.

$$a|k\wedge b|k\Leftrightarrow[a,b]|k$$

**۷** مضارب مشترک دو عدد a و b همان مضارب ک.م.م آن دو عدد است.

**۸** رابطهٔ بین ب.م.م و ک.م.م. دو عدد a و b به‌صورت زیر است. با داشتن ب.م.م می‌توان ک.م.م را به دست آورد و بالعکس.

$$(a,b)\times[a,b]=|a\times b|\Rightarrow\begin{cases}(a,b)=\dfrac{|a\times b|}{[a,b]}\\ [a,b]=\dfrac{|a\times b|}{(a,b)}\end{cases}$$

**۹** اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آن‌ها برابر حاصل‌ضرب دو عدد است.

$$(a,b)=۱\Rightarrow[a,b]=|a\times b|$$

**۱۰** در مسائلی که چند ب.م.م یا ک.م.م داخل هم قرار گرفته‌اند، از داخل به‌سمت بیرون شروع به محاسبه می‌کنیم.

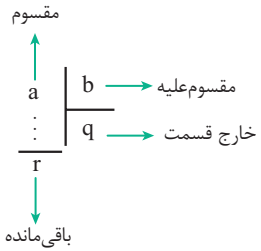
**مثال**

$$[(۱۲۰,۱۵۰),۴۲]\xrightarrow{(۱۲۰,۱۵۰)=۳۰}[۳۰,۴۲]$$

$$=[۶\times۵,۶\times۷]=۶\times[۵,۷]=۶\times۳۵=۲۱۰$$

**قضیهٔ تقسیم:** اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، خارج‌قسمتی مانند q و باقی‌مانده‌ای مانند r خواهیم داشت، به‌طوری که:

$$a = b \times q + r \qquad 0 \leq r < b$$




a: عدد صحیح

b: عدد طبیعی

q: عدد صحیح

r: عدد حسابی

توجه کنید q و r منحصربه‌فرد می‌باشند.

**نکته**

۱ توجه کنید در مسائل تقسیم، باقی‌مانده هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. اگر مانده (نگیم باقی‌مانده) منفی بود یا از b بزرگ‌تر بود، مضرب‌های b را به آن اضافه و کم می‌کنیم تا باقی‌مانده به‌دست آید. فرض کنید a را بر ۱۷ تقسیم کرده‌ایم و ۳۷ مانده است. کافی است ۲ برابر مقسوم‌علیه که ۳۴ می‌شود را از مانده کم کنیم تا باقی‌مانده به دست آید.

$$\begin{array}{r|l} a & 17 \\ \vdots & \\ 37 & \end{array} \Rightarrow 17 \text{ باقی ماندهٔ تقسیم } a \text{ بر } r = 37 - 2\times 17 = 3$$

۲ اگر در یک تقسیم، خارج‌قسمت برابر q و باقی‌مانده r باشد، حداکثر می‌توانیم $\left[\frac{r}{q}\right]$ به مقسوم‌علیه اضافه کنیم به‌طوری که خارج‌قسمت و مقسوم تغییر نکنند.

۳ خیلی از مسائل تقسیم را می‌توانیم به کمک هم‌نهشتی حل کنیم که در ادامه به آن می‌پردازیم.

**افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم:** در تقسیم عدد صحیح a بر n، با n نوع باقی‌ماندهٔ $0,1,2,\ldots,n-1$ روبه‌رو هستیم. اگر خارج‌قسمت تقسیم a بر n را k بنامیم، داریم:

$$\begin{array}{c|c} a & n \\ \hline 0 & k \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} a & n \\ \hline 1 & k \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} a & n \\ \hline 2 & k \end{array} \qquad \cdots \qquad \begin{array}{c|c} a & n \\ \hline n-1 & k \end{array}$$

$$a=nk \qquad a=nk+1 \qquad a=nk+2 \qquad \cdots \qquad a=nk+(n-1)$$

بنابراین هنگامی که اعداد صحیح را بر n تقسیم می‌کنیم، مجموعهٔ اعداد صحیح به n زیرمجموعه (براساس تعداد باقی‌مانده‌ها) افراز می‌شود؛ به‌عنوان مثال اگر عدد صحیحی مانند a را بر ۵ تقسیم کنیم، a به یکی از ۵ فرم $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ قابل نمایش است. توجه کنید مثلاً $5k+7$ همان $5k+2$ است، زیرا می‌توانیم مضارب ۵ را به $5k+2$ اضافه یا کم کنیم. از طرفی $5k-4$ با اضافه کردن ۵ به $5k+1$ تبدیل می‌شود، پس $5k-4$ همان $5k+1$ است.

در مثالی که گفتیم در تقسیم عدد صحیح a بر ۵، a را می‌توان به یکی از فرم‌های $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ نشان داد و یا a را به‌صورت $5k$، $\underbrace{5k+4}_{5k-1}$ و یا $\underbrace{5k+3}_{5k-2}$ نیز می‌توانیم نشان دهیم.

$5k\pm1$ و $5k\pm2$

**نکته**

۱ در اثبات بسیاری از مسائل به روش (در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها) از ویژگی افراز اعداد صحیح استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم ثابت کنیم مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳ دارای باقی‌ماندهٔ ۰ یا ۱ است، کافی است عدد صحیح را $3k$، $3k+1$ و $3k+2$ ($3k-1$) در نظر بگیریم و در هر ۳ حالت مسئله را اثبات کنیم.

۲ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو فرم $6k+1$ یا $6k-1$ قابل نمایش است؛ زیرا اگر آن عدد $6k$، $6k+2$، $6k+3$ و $6k+4$ فرض شود، در این صورت بیشتر از دو مقسوم‌علیه مثبت خواهد داشت و اول نخواهد بود.

۳ اگر $a$ یک عدد صحیح فرد باشد $(a=2k+1)$ آنگاه $a^2=8q+1$ و $a^4=16q'+1$ است.

۴ در تقسیم، هر اتفاقی که برای مقسوم بیفتد برای باقی‌مانده هم می‌افتد؛ مثلاً اگر مقسوم ۲ برابر شود، باقی‌مانده هم ۲ برابر می‌شود. (باقی‌ماندهٔ جدید را باید با اضافه و کم کردن مضارب مقسوم‌علیه به ماندهٔ اولیه تعیین کنیم) یا مثلاً اگر مقسوم به توان ۳ برسد، باقی‌مانده هم به توان ۳ می‌رسد که برای تعیین باقی‌ماندهٔ جدید باید مضارب مقسوم‌علیه را به ماندهٔ اولیه اضافه و کم کنیم تا شرط $0\le r<b$ محقق شود. البته این ویژگی را در همنهشتی بهتر می‌بینید و از آن برای تعیین باقی‌ماندهٔ اعداد توان‌دار استفاده می‌کنیم.

**مثال**

$$a=5k+2 \xrightarrow[\text{بر ۵ را می‌خواهیم.}]{\text{باقی‌ماندهٔ } a^3} a^3=5k'+2^3$$

$$\Rightarrow a^3=5k'+\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵ را کم می‌کنیم}}}{8} \qquad \Rightarrow a^3=5k''+\underbrace{8-5}_{3\Rightarrow r=3}$$

باقی‌ماندهٔ $a^3$ بر ۵ برابر ۳ است.

**همنهشتی:** اگر دو عدد $a$ و $b$ در تقسیم بر عدد طبیعی $m$ دارای باقی‌ماندهٔ یکسانی باشند، آنگاه می‌گوییم $a$ و $b$ به پیمانهٔ $m$ همنهشت یا هم‌باقی‌مانده هستند. اگر $a$ و $b$ به پیمانهٔ $m$ همنهشت باشند، می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$ که در این صورت $m$ تفاضل $a$ و $b$ را عاد می‌کند. $m\mid a-b$

به‌عنوان مثال ۲۷ و ۱۲ در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند که می‌نویسیم

$$27\overset{5}{\equiv}12 \text{ و } 5\mid 27-12$$

**نکته**

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه $m \mid a-b$، پس می‌توان گفت پیمانهٔ $m$ یکی از مقسوم علیه‌های مثبت $a-b$ است.

## ویژگی‌های هم‌نهشتی

۱ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

به دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی را اضافه و یا از دو طرف آن عددی را کم کرد.

۲ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ka \overset{m}{\equiv} kb$

دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد ولی عکس این مطلب درست نیست یعنی نمی‌توان عبارت یکسانی را در حالت ضرب از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی حذف کرد؛

**مثال**

$۲۰ \overset{۶}{\equiv} ۱۴ \not\Rightarrow ۱۰ \overset{۶}{\equiv} ۷$

۳ $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow ka \overset{km}{\equiv} kb \qquad (k \neq ۰)$

دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی و پیمانه را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد. عکس این مطلب نیز درست است.

۴ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان $n (n \in \mathbb{N})$ رساند، ولی عکس این مطلب همواره درست نیست یعنی نمی‌توان از دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی، ریشهٔ $n$اُم گرفت.

۵ $a \overset{m}{\equiv} b \wedge b \overset{m}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

اگر $a$ و $b$ به پیمانهٔ $m$ و $b$ و $c$ نیز به پیمانهٔ $m$ هم‌نهشت باشند، آنگاه $a$ و $c$ نیز به پیمانهٔ $m$ هم‌نهشت هستند.

۶ $a \overset{m}{\equiv} b \wedge c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$

دو طرف روابط هم‌نهشتی با مبنای یکسان را می‌توان باهم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کرد.

۷ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[\text{صحیح هستند}]{k \text{ و } k' \text{ اعدادی}} a \pm km \overset{m}{\equiv} b \pm k'm$

مضرب صحیحی از پیمانه را می‌توان به یک طرف و یا دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی اضافه و یا کم نمود.

**۸** $a \mid m \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$ ($a \div m$ باقی‌ماندهٔ $r$)

$0 \le r < b$

اگر $r$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $a$ بر $m$ باشد، $a$ و $r$ به پیمانهٔ $m$ هم‌نهشت هستند.

**۹** $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{\div c} a \overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv} b$

اگر بخواهیم دو طرف رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عدد صحیح غیرصفر مانند $c$ تقسیم کنیم، پیمانه نیز بر ب.م.م خود پیمانه و $c$ تقسیم می‌شود.

**مثال**

$$\overset{6}{74} \equiv 26 \xrightarrow{\div 2} 37 \overset{\frac{6}{(6,2)}=3}{\equiv} 13$$

نتیجه از ۹: اگر $(m,c)=1$ باشد، آنگاه:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{\div c} a \overset{\frac{m}{(m,c)=1}}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

نتیجه از ۹: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی صحیح و غیرصفر مانند $c$ تقسیم کنیم ولی یک طرف رابطهٔ هم‌نهشتی بر $c$ بخش‌پذیر نبود، مضربی از پیمانه را به آن طرف، اضافه یا کم کنیم تا دو طرف بر $c$ بخش‌پذیر شوند.

**مثال**

$$\overset{5}{7x} \equiv 3 \xrightarrow[\text{طرف راست رابطه اضافه می‌کنیم.}]{\text{۵ برابر پیمانه یعنی ۲۵ را به}} \overset{5}{7x} \equiv 3+25$$

$$\xrightarrow{\div 7} x \overset{\frac{5}{(5,7)=1}}{\equiv} 4 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 4$$

**۱۰** $a \overset{m}{\equiv} b \wedge n \mid m \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

اگر $a$ و $b$ به پیمانهٔ $m$ هم‌نهشت باشند، آنگاه $a$ و $b$ به پیمانهٔ مقسوم‌علیه‌های $m$ نیز هم‌نهشت هستند.

**۱۱** $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \\ a \overset{p}{\equiv} b \end{matrix}\right\} a \overset{[m,n,p]}{\equiv} b$ ([m,n,p] ک.م.م)

اگر دو عدد $a$ و $b$ به پیمانه‌های $m$، $n$ و $p$ هم‌نهشت باشند، دو عدد به پیمانهٔ $[m,n,p]$ نیز هم‌نهشت هستند.

**مثال**

$$a \overset{۴}{\equiv} b \overset{۶}{\equiv} a \Rightarrow a \overset{[۴,۶]}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{۱۲}{\equiv} b$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \wedge b \overset{n}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{(m,n)}{\equiv} c$$

اگر a و b به پیمانهٔ m و همچنین b و c به پیمانهٔ n هم‌نهشت باشند، آنگاه a و c به پیمانهٔ $(m,n)$ باهم هم‌نهشت هستند.

**مثال**

$$۱۷ \overset{۶}{\equiv} ۲۹ \wedge ۲۹ \overset{۴}{\equiv} ۳۳ \Rightarrow ۱۷ \overset{(۶,۴)}{\equiv} ۳۳ \Rightarrow ۱۷ \overset{۲}{\equiv} ۳۳$$

**تبدیل رابطهٔ هم‌نهشتی به قضیهٔ تقسیم و بالعکس:**

$$a = mq + r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

**مثال**

$$a \overset{۵}{\equiv} ۳ \Leftrightarrow a = ۵q + ۳$$

**افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک رابطهٔ هم‌نهشتی و قضیهٔ تقسیم:**

هم‌نهشتی دقیقاً مانند قضیهٔ تقسیم، مجموعهٔ اعداد صحیح را به زیرمجموعه‌هایی افراز می‌کند. از آنجایی که در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی m با m نوع باقی‌ماندهٔ ۰، ۱، ۲، ... ، $m-۱$ مواجهیم، پس می‌توان گفت این رابطهٔ هم‌نهشتی مجموعهٔ اعداد صحیح را به m کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی افراز می‌کند. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر m برابر r باشد، آنگاه کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m را با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم.

**مثال** مجموعه‌های حاصل از افراز هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۴ به‌صورت زیر هستند:

$$[۰]_۴ = \{..., -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, ...\}$$
$$[۱]_۴ = \{..., -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ...\}$$
$$[۲]_۴ = \{..., -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ...\}$$
$$[۳]_۴ = \{..., -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ...\}$$

**نکته**

هر دو عددی که در یک کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m جای بگیرند، به پیمانهٔ m هم‌نهشت (هم‌باقی‌مانده) هستند.

ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

MAZE EDUCATIONAL GROUP
ilo
SINCE 1392

# فیزیک ریاضی

دوازدهم ریاضی

# معجزهٔ شب آزمون



SanjeshCloud

آنچه گذشت...

## حرکت با سرعت ثابت

### ویژگی‌های حرکت با سرعت ثابت

۱ جهت حرکت تغییر نمی‌کند؛ در نتیجه مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر و تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط، برابر است.

۲ اندازهٔ سرعت (تندی)، ثابت است؛ بنابراین مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی با طول بازهٔ زمانی، متناسب است و داریم:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}$$

۳ سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی با سرعت لحظه‌ای در هر لحظه، برابر است و داریم:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۴ معادلهٔ مکان ـ زمان به‌صورت معادلهٔ درجهٔ (۱) است.

$$x = v t + x_0$$

($x$: مکان، $t$: زمان، $v$: سرعت، $x_0$: مکان اولیه)

۵ نمودار مکان ـ زمان به‌صورت خطی است که شیب آن ثابت و برابر با $v$ و عرض از مبدأ آن $x_0$ است.

۶ اگر $v$ و $x_0$ مختلف‌العلامت باشند، بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = \frac{-x_0}{v}$، تغییر جهت می‌دهد و متحرک از مبدأ عبور می‌کند.

۷ شتاب این حرکت، صفر است $(a = 0)$.

**مثال** **دانستن محل قرارگیری یک ماهواره در مأموریت‌های فضایی و اطمینان از این‌که ماهواره در مدار پیش‌بینی‌شده قرار گرفته، یکی از مأموریت‌های کارشناسان فضایی است. بدین‌منظور تَپ‌های الکترومغناطیسی راکه با سرعت نور در فضا حرکت می‌کنند، به طرف ماهوارهٔ موردنظر می‌فرستند و بازتاب آن توسط ایستگاه زمینی، دریافت می‌شود. اگر مدت‌زمان رفت و برگشت یک تپ $0/24\,s$ باشد، فاصلهٔ ماهواره از ایستگاه زمینی، تقریباً چند متر است؟ (سرعت نور را $3\times10^8\ \frac{m}{s}$ در نظر بگیرید.)**

مدت‌زمان رفت و برگشت تپ ۰/۲۴s است؛ بنابراین داریم:

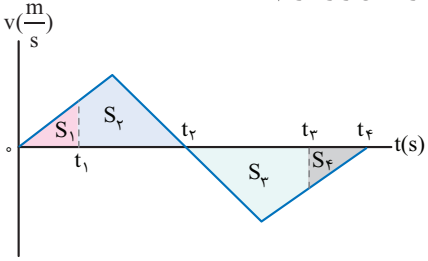
$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=0/24s]{s_{av}=v=3\times10^{8}\frac{m}{s}}3\times10^{8}=\frac{l}{0/24}\Rightarrow l=7/2\times10^{7}m$$

با توجه به این‌که در یک رفت و برگشت تپ، دو بار فاصلهٔ ماهواره از ایستگاه زمینی طی می‌شود، داریم:

$$l=2d\Rightarrow 7/2\times10^{7}=2d\Rightarrow d=3/6\times10^{7}m$$

## مسافت و جابه‌جایی در نمودار سرعت - زمان

برای محاسبهٔ مسافت و جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی از روی نمودار سرعت ـ زمان، از مساحت محصور نمودار $v-t$ با محور t استفاده می‌کنیم. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان در شکل زیر داریم:




**جابه‌جایی** (بالای محور t با علامت مثبت و پایین محور t با علامت منفی):

$$\begin{cases}t_1\text{ تا }0\text{ در بازهٔ صفر}: \Delta x_1=S_1\\ t_2\text{ تا }t_1\text{ در بازهٔ}: \Delta x_2=S_2\\ t_3\text{ تا }t_2\text{ در بازهٔ}: \Delta x_3=-S_3\\ t_4\text{ تا }t_3\text{ در بازهٔ}: \Delta x_4=-S_4\\ t_4\text{ تا }0\text{ در بازهٔ صفر}: \Delta x_5=S_1+S_2-S_3-S_4\end{cases}$$

**مسافت طی‌شده** (بدون در نظر گرفتن علامت):

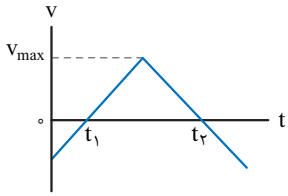
$$\begin{cases}t_1\text{ تا }0\text{ در بازهٔ صفر}: l_1=S_1\\ t_2\text{ تا }t_1\text{ در بازهٔ}: l_2=S_2\\ t_3\text{ تا }t_2\text{ در بازهٔ}: l_3=S_3\\ t_4\text{ تا }t_3\text{ در بازهٔ}: l_4=S_4\\ t_4\text{ تا }0\text{ در بازهٔ صفر}: l_5=S_1+S_2+S_3+S_4\end{cases}$$

**خواست باشه!** اگر توی سؤالی نمودار $v-t$ داده بودن و تندی متوسط یا سرعت متوسط خواستن، اول جابه‌جایی یا مسافت رو توی بازهٔ خواسته‌شده به‌دست بیار. بعدش طبق رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و $s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$، تندی متوسط یا سرعت متوسط رو حساب کن.

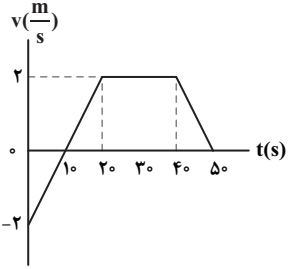
**نکته**

اگر در یک بازهٔ زمانی، نمودار سرعت - زمان به شکل مثلثی به قاعدهٔ محور t باشد، داریم:

در بازهٔ $t_1$ تا $t_2$: $s_{av} = |v_{av}| = \frac{1}{2}|v_{max}|$




**مثال** متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند در لحظهٔ $t = ۰$ از مکان $x_۰ = ۰$ می‌گذرد. نمودار سرعت ـ زمان این متحرک مطابق شکل زیر است:

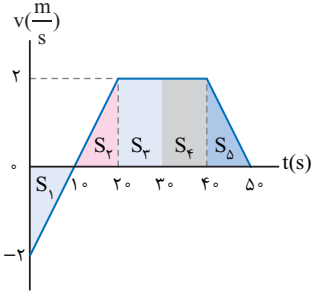



الف) مکان متحرک را در لحظه‌های $t_1 = ۱۰s$ ، $t_2 = ۲۰s$ ، $t_3 = ۳۰s$ ، $t_4 = ۴۰s$ و $t_5 = ۵۰s$ به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی صفر تا ۵۰s به‌دست آورید.

**پاسخ مثال**

**الف**




$$S_۱ = \frac{۱۰ \times ۲}{۲} = ۱۰m$$

$$S_۲ = \frac{۱۰ \times ۲}{۲} = ۱۰m$$

$$S_۳ = ۱۰ \times ۲ = ۲۰m$$

$$S_۴ = ۱۰ \times ۲ = ۲۰m$$

$$S_۵ = \frac{۱۰ \times ۲}{۲} = ۱۰m$$

$$\Delta x_{(0\to 10s)} = -S_1 = -10m \Rightarrow x_{10} - \underbrace{x_0}_{0} = -10 \Rightarrow x_{10} = -10m$$

$$\Delta x_{(0\to 20s)} = -S_1 + S_2 = -10+10 = 0 \Rightarrow x_{20} - \underbrace{x_0}_{0} = 0 \Rightarrow x_{20} = 0$$

$$\Delta x_{(0\to 30s)} = -S_1 + S_2 + S_3 = -10+10+20 = 20m$$

$$\Rightarrow x_{30} - \underbrace{x_0}_{0} = 20 \Rightarrow x_{30} = 20m$$

$$\Delta x_{(0\to 40s)} = -S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = -10+10+20+20 = 40m$$

$$\Rightarrow x_{40} - \underbrace{x_0}_{0} = 40 \Rightarrow x_{40} = 40m$$

$$\Delta x_{(0\to 50s)} = -S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = -10+10+20+20+10 = 50m$$

$$\Rightarrow x_{50} - \underbrace{x_0}_{0} = 50 \Rightarrow x_{50} = 50m$$

**ب** در بازهٔ زمانی صفر تا $50s$ داریم:

$$\begin{cases} \Delta x = -S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = -10+10+20+20+10 = 50m \\ l = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 10+10+20+20+10 = 70m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{50}{50} = 1\dfrac{m}{s} \\ s_{av} = \dfrac{l}{\Delta t} = \dfrac{70}{50} = 1/4\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

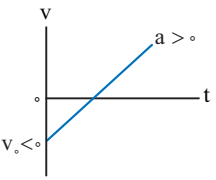
## حرکت شتاب ثابت

### ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت

**۱** شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی با شتاب لحظه‌ای در هر لحظه برابر است:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

**۲** معادلهٔ سرعت ـ زمان درجهٔ (۱) و نمودار سرعت ـ زمان خطی با شیب ثابت است که شیب آن شتاب $(a)$ و عرض از مبدأ آن سرعت اولیه $(v_0)$ است.

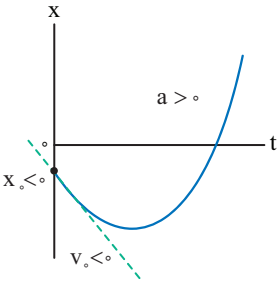



سرعت اولیه $(\frac{m}{s})$ $\rightarrow$ $v = at + v_0$ $\leftarrow$ سرعت $(\frac{m}{s})$

زمان $(s)$ ↑

شتاب $(\frac{m}{s^2})$ ↓

۳ معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ (۲) و نمودار مکان ـ زمان به شکل سهمی است که تقعر آن نشان‌دهندهٔ علامت شتاب، شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=0$ برابر با سرعت اولیه $(v_0)$ و عرض از مبدأ آن مکان اولیه $(x_0)$ است.




سرعت اولیه $(\frac{m}{s})$ مکان $(m)$

$$x = \frac{1}{2}a t^2 + v_0 t + x_0$$

شتاب $(\frac{m}{s^2})$ مکان اولیه $(m)$

**خواست باشه!** اگر $a>0$ باشد، سهمی دارای مینیمم و اگر $a<0$ باشد، سهمی دارای ماکزیمم است.

۴ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1$ تا $t_2$ برابر است با سرعت در لحظهٔ وسط این بازهٔ زمانی $(t=\frac{t_1+t_2}{2})$:

$$v_{av_{(t_1-t_2)}} = v_{(t=\frac{t_1+t_2}{2})}$$

۵ سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی از $t_1$ تا $t_2$ برابر است با میانگین سرعت اول و آخر این بازه:

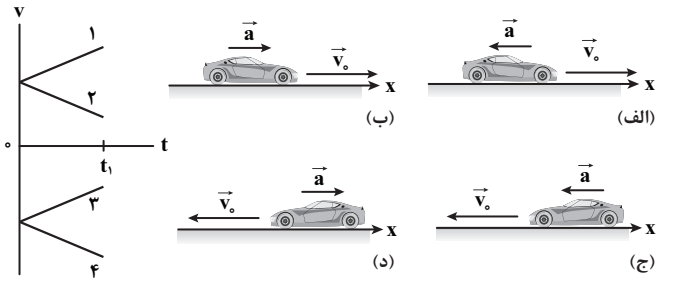
$$v_{av_{(t_1-t_2)}} = \frac{v_{t_1} + v_{t_2}}{2}$$

۶ اگر متحرک در دو لحظهٔ $t_1$ و $t_2$، در یک مکان باشد نتیجه می‌گیریم:

- متحرک در لحظهٔ $t' = \frac{t_1+t_2}{2}$ تغییر جهت می‌دهد.
- تندی متحرک در دو لحظهٔ $t_1$ و $t_2$ یکسان و سرعت متحرک در این دو لحظه قرینه است $(v_{t_2} = -v_{t_1})$.
- سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1$ تا $t_2$، صفر است.
- مسافت طی‌شده از $t_1$ تا لحظهٔ تغییر جهت $(t')$ با مسافت طی‌شده از لحظهٔ تغییر جهت $(t')$ تا لحظهٔ $t_2$ یکسان است.

۷ اگر سرعت اولیه و شتاب متحرک، هم‌جهت باشند، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و حرکت آن پیوسته تندشونده است و اگر سرعت اولیه و شتاب متحرک در خلاف جهت هم باشند، متحرک در لحظهٔ $t' = \frac{-v_0}{a}$ متوقف می‌شود و به شرط ادامه‌دار بودن حرکت در لحظهٔ $t'$، تغییر جهت می‌دهد و حرکت متحرک تا قبل از $t'$ کندشونده و پس از $t'$ تندشونده خواهد بود.

**مثال در تمامی حالت‌های شکل زیر، خودروها در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت‌اند. حرکت هر یک از خودروها، توسط کدام‌یک از نمودارهای $v-t$ در محدودهٔ زمانی نشان داده‌شده روی نمودارها، توصیف می‌شود؟ همچنین توضیح دهید تندی کدام خودرو در حال افزایش (حرکت تندشونده) و تندی کدام خودرو در حال کاهش (حرکت کُندشونده) است.**



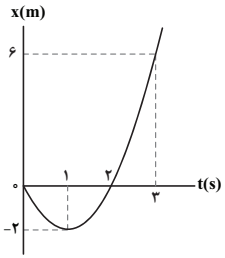

**پاسخ مثال**

الف) نمودار (۲)　　ب) نمودار (۱)

ج) نمودار (۴)　　د) نمودار (۳)

حرکت خودروهای (ب) و (ج) تندشونده و حرکت خودروهای (الف) و (د) کندشونده است.

**مثال شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x با شتاب ثابت در حرکت است:**



**الف) سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۳s ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟**
**ب) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را برحسب SI بنویسید.**
**ج) سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۳s$ چند متر بر ثانیه است؟**
**د) نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنید.**

**پاسخ مثال**

**الف**

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶ - ۰}{۳ - ۰} = ۲\frac{m}{s}$$

**ب** ریشه‌های نمودار $\alpha = ۰$ و $\beta = ۲s$ و $x_{۱s} = -۲m$، بنابراین:

$$\begin{cases} t = ۰ : x = ۰ \\ t = ۱s : x = -۲m \\ t = ۲s : x = ۰ \end{cases}$$

$$x = \frac{۱}{۲}a(t-\alpha)(t-\beta) \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}a(t-۰)(t-۲)$$

$$\xrightarrow{x_{۱s} = -۲m} -۲ = \frac{۱}{۲}a(۱)(۱-۲) \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

$$x = \frac{۱}{۲}(۴)(t)(t-۲) \Rightarrow x = ۲t^۲ - ۴t$$

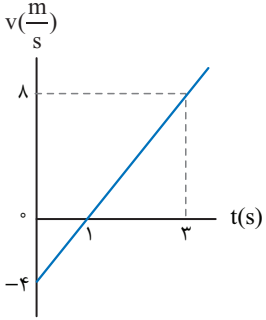
**ج**

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = ۲t^۲ - ۴t \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۴\frac{m}{s} \\ x_۰ = ۰ \end{cases}$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۴t - ۴ \xrightarrow{t=۳s} v = ۴(۳) - ۴ = ۸\frac{m}{s}$$

**د**

$$v = ۴t - ۴$$

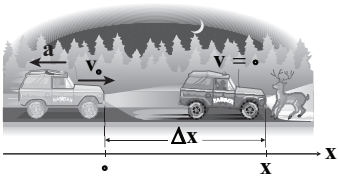


## روابط حرکت با شتاب ثابت

برای متحرکی که با شتاب ثابت a در مدت‌زمان t سرعت خود را از $v_1$ به $v_2$ برساند و جابه‌جایی آن $\Delta x$ باشد، ۵ حالت داریم:

| حالت | توضیح | رابطه |
|---|---|---|
| ۱ | وقتی در سؤال حرفی از جابه‌جایی نشده. | $v_2 = at + v_1$ |
| ۲ | وقتی سرعت نهایی $(v_2)$ را نداریم. | $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t$ |
| ۳ | وقتی مقدار شتاب را نداریم. (مستقل از شتاب) | $\Delta x = (\frac{v_1 + v_2}{2})t$ |
| ۴ | وقتی در سؤال حرفی از زمان نشده. (مستقل از زمان) | $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$ |
| ۵ | وقتی سرعت اولیه $(v_1)$ را نداریم. | $\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + v_2 t$ |

**مثال** **محیط‌بان یک پارک حفاظت‌شده هنگام گشت شبانه، با تندی $15\frac{m}{s}$ در جاده‌ای مستقیم در حرکت است که ناگهان گوزنِ بدون حرکتی را در جلوی خود می‌بیند و ترمز می‌گیرد (شکل زیر). حرکت خودرو با شتابی به اندازهٔ $7/5\frac{m}{s^2}$ کُند می‌شود تا سرانجام متوقف شود. اگر لحظه‌ای که محیط‌بان ترمز می‌گیرد، گوزن در فاصلهٔ ۲۵ متری از خودرو باشد:**




**الف) خودرو در فاصلهٔ چند متری از گوزن متوقف می‌شود؟**

**ب) چند ثانیه طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟**

**پاسخ مثال**

**الف** طبق معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[a=-0/5\frac{m}{s^2}]{v_2=0,\ v_1=15\frac{m}{s}}$$

$$0^2 - 15^2 = 2(-0/5)\Delta x \Rightarrow \Delta x = 15m$$

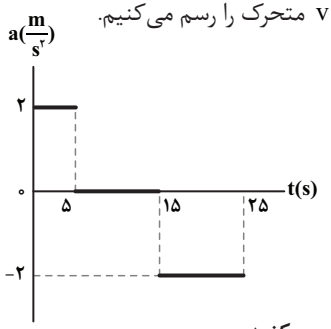
فاصلهٔ توقف از گوزن: $d = 25 - 15 = 10m$

**ب** مدت‌زمان توقف برابر است با:

$$v_2 = at + v_1 \Rightarrow 0 = -0/5t + 15 \Rightarrow 0/5t = 15 \Rightarrow t = 2s$$

## حرکت چندمرحله‌ای

برای حل این تیپ از سؤالات، نمودار $v-t$ متحرک را رسم می‌کنیم.




**مثال** **شکل مقابل، نمودار شتاب ـ زمان یک ماشین اسباب‌بازی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x حرکت می‌کند. با فرض $x_0 = 0$ و $v_0 = 0$، در بازهٔ زمانی صفر تا 25/0s:**

**الف) نمودار سرعت ـ زمان این ماشین را رسم کنید.**

**ب) با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، مشخص کنید در کدام‌یک از بازه‌های زمانی، حرکت ماشین تندشونده، کُندشونده یا با سرعت ثابت است.**

**ج) شتاب متوسط ماشین در کل این 25s چند متر بر مربع ثانیه است؟**

**د) جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده توسط ماشین را برحسب متر محاسبه کنید.**

**پاسخ مثال**

**الف** ابتدا سرعت متحرک را در لحظات 5s، 15s و 25s به‌دست می‌آوریم:

$$(0-5s): a = 2\frac{m}{s^2} \Rightarrow 2 = \frac{v_{5s} - v_0}{5-0} \Rightarrow v_{5s} - 0 = 10 \Rightarrow v_{5s} = 10\frac{m}{s}$$

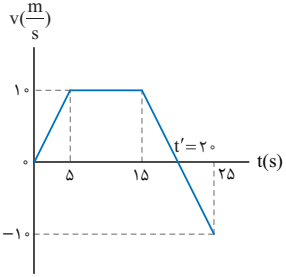
$$(5s-15s): a = 0 \Rightarrow v_{15s} = v_{5s} = 10\frac{m}{s}$$

$$(15s-25s): a = -2\frac{m}{s^2} \Rightarrow -2 = \frac{v_{25s} - v_{15s}}{25-15}$$

$$\Rightarrow v_{25s} - 10 = -20 \Rightarrow v_{25s} = -10\frac{m}{s}$$

حالا نمودار $v-t$ متحرک را رسم می‌کنیم:

$$(۱۵s-۲۵s): a=-۲\frac{m}{s^۲} \Rightarrow -۲=\frac{۰-۱۰}{t'-۱۵} \Rightarrow t'-۱۵=۵ \Rightarrow t'=۲۰s$$

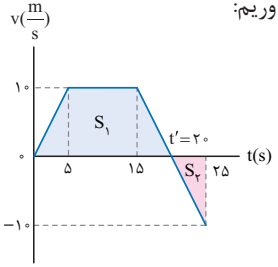



**ب** با توجه به نمودار $v-t$ درمی‌یابیم در بازه‌های زمانی صفر تا ۵s و ۲۰s تا ۲۵s حرکت تندشونده، در بازهٔ زمانی ۵s تا ۱۵s حرکت با سرعت ثابت و در بازهٔ زمانی ۱۵s تا ۲۰s حرکت کندشونده است.

**ج** شتاب متوسط در کل حرکت برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۲۵}-v_{۰}}{۲۵-۰}=\frac{-۱۰-۰}{۲۵}=-۰/۴\frac{m}{s^۲}$$

**د** جابه‌جایی و مسافت طی‌شده را به‌دست می‌آوریم:




$$S_۱=\frac{(۲۰+۱۰)}{۲}\times ۱۰=۱۵۰$$

$$S_۲=\frac{۵\times ۱۰}{۲}=۲۵$$

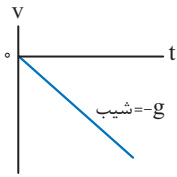
$$\Delta x=S_۱-S_۲=۱۵۰-۲۵=۱۲۵m$$

$$l=S_۱+S_۲=۱۵۰+۲۵=۱۷۵m$$

## سقوط آزاد

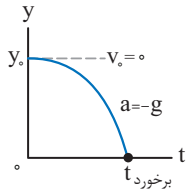
وقتی گلوله‌ای در شرایط خلأ (بدون مقاومت هوا) از یک بلندی رها شود، حرکت آن با شتاب ثابت $a=-g$ و بدون سرعت اولیه $(v_۰=۰)$ خواهد بود و روابط آن همان روابط حرکت با شتاب ثابت است؛ بنابراین:

- معادلهٔ سرعت - زمان حرکت درجهٔ (۱) و نمودار سرعت - زمان آن خطی است با شیب ثابت $-g$ و عرض از مبدأ صفر.




$$v = -gt$$

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت درجهٔ (۲) و نمودار مکان ـ زمان آن یک سهمی است با شیب اولیهٔ صفر و تقعر رو به پایین.




$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

## روابط سقوط آزاد

برای گلوله‌ای که با شتاب ثابت $-g$ در مدت $t$ سرعت خود را از $v_1$ به $v_2$ برساند و جابه‌جایی آن $\Delta y$ باشد، ۴ حالت داریم:

| حالت | توضیح | رابطه |
|---|---|---|
| یک | وقتی در سؤال حرفی از جابه‌جایی نشده. | $v_2 = -gt + v_1$ |
| دو | وقتی سرعت نهایی $(v_2)$ را نداریم. | $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t$ |
| سه | وقتی بخواهیم جابه‌جایی را بدون استفاده از شتاب به‌دست آوریم. (مستقل از شتاب) | $\Delta y = (\frac{v_1 + v_2}{2})t$ |
| چهار | وقتی در سؤال حرفی از زمان نشده. (مستقل از زمان) | $v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y$ |

**مثال** **سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۱۲۵m نسبت به سطح زمین آزادانه سقوط می‌کند.**
**الف) زمان سقوط آزاد سنگ را به‌دست آورید.**
**ب) جابه‌جایی سنگ را بین دو لحظهٔ $t_1 = 3/0s$ و $t_2 = 4/0s$ به‌دست آورید.**
**پ) نمودارهای مکان ـ زمان، سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان سنگ را رسم کنید.**
**(مبدأ مکان سطح زمین فرض شود و $g = 10\frac{m}{s^2}$)**

الف)

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t$$

$$\xrightarrow[\Delta y=-125m]{v_1=v_0=0} -125 = -\frac{1}{2}(10)t^2 + 0 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5s$$

ب)

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+y_0$$

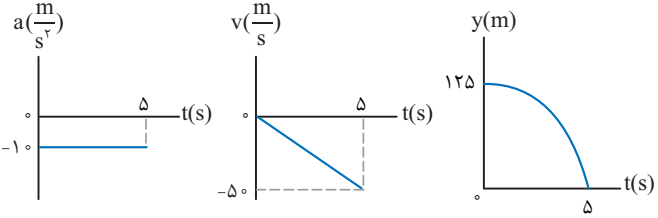
$$\Rightarrow\begin{cases}t_1=3s: y_1=-5(3^2)+125=80m\\ t_2=4s: y_2=-5(4^2)+125=45m\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta y=y_2-y_1=45-80=-35m$$

روش دوم: جابه‌جایی ثانیهٔ nاُم $\Delta y_n=(n-0/5)(-g)$

$$\xrightarrow{\text{ثانیهٔ چهارم: } n=4}\Delta y_4=(4-0/5)(-10)=-35m$$

پ)




**نکته**

اگر دو گلوله با فاصلهٔ زمانی $t'$ رها شوند، مدت حرکت گلولهٔ اول را $t$ و مدت حرکت گلولهٔ دوم را $t-t'$ در نظر می‌گیریم و از فرمول‌های سقوط آزاد برای هر یک از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

**مثال** **گلولهٔ A را در شرایط خلأ از ارتفاع h و بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. سه ثانیه بعد گلولهٔ B را از ارتفاع $\frac{h}{4}$ و بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. $(g=10\frac{m}{s^2})$**

**الف) نسبت سرعت گلولهٔ A به سرعت گلولهٔ B در لحظه‌های رسیدن به زمین چقدر است؟**

**ب) اگر دو گلوله هم‌زمان به زمین برسند، مدت زمان سقوط هر گلوله و ارتفاع h را پیدا کنید.**

**حل** الف)

معادلهٔ مستقل از زمان: $v_2^2-v_1^2=-2g\Delta y$

$$\xrightarrow[v_2=v]{v_1=0} v^2=-2g\Delta y\Rightarrow\begin{cases}v_A^2=-2g(0-h)\\ v_B^2=-2g(0-\frac{h}{4})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=\frac{h}{\frac{h}{4}}=4\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=2$$

**ب** با توجه به این‌که گلولهٔ B، ۳ ثانیه بعد از گلولهٔ A رها شده است، داریم:

$$y_A = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_{۰_A} = -۵t^۲ + h$$

$$y_B = -\frac{۱}{۲}g(t-۳)^۲ + y_{۰_B} = -۵t^۲ + ۳۰t - ۴۵ + \frac{h}{۴}$$

درلحظهٔ t : $y_A = y_B = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۵t^۲ + h = ۰ \Rightarrow h = ۵t^۲ \quad (۱) \\ -۵t^۲ + h = -۵t^۲ + ۳۰t - ۴۵ + \frac{h}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۴}h = ۳۰t - ۴۵ \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۳}{۴}(۵t^۲) = ۳۰t - ۴۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{۴}t^۲ - ۳۰t + ۴۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲s \\ t = ۶s \end{cases} \xrightarrow{t>۳s} t = ۶s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_A = ۶s \\ t_B = ۶ - ۳ = ۳s \end{cases}, \; h = ۵t^۲ = ۵(۶)^۲ = ۱۸۰m$$

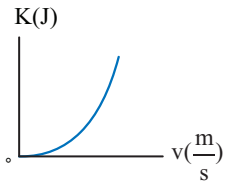
## کار، انرژی و توان

### انرژی جنبشی

انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند، برابر است با:

$$\text{انرژی جنبشی (J)} \leftarrow K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \begin{matrix} \uparrow \text{جرم (kg)} \\ \downarrow \text{تندی } (\frac{m}{s}) \end{matrix}$$

نمودار انرژی جنبشی برحسب تندی یک جسم به‌صورت سهمی شکل زیر است:




**نکته**

تغییرات انرژی جنبشی یک جسم برابر است با:

$$\Delta K = K_۲ - K_۱ \xrightarrow{\text{جرم ثابت است}} \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

**نکته**

نسبت انرژی جنبشی در دو حالت (۱) و (۲) برابر است با:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

**مثال** **حدود ۵۰۰۰۰ سال پیش شهاب‌سنگی در نزدیک آریزونای آمریکا به زمین برخورد کرده و چاله‌ای بزرگ از خود به جای گذاشته است. با اندازه‌گیری‌های جدید برآورد شده است که جرم این شهاب‌سنگ حدود $1/4\times10^8\,kg$ بوده و با تندی $12\,\frac{km}{s}$ به زمین برخورد کرده است. انرژی جنبشی این شهاب‌سنگ هنگام برخورد به زمین چند گیگاژول بوده است؟**

**پاسخ مثال** ابتدا انرژی جنبشی شهاب‌سنگ را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times1/4\times10^8\times(12\times10^3)^2=0/7\times144\times10^{14}\,J$$

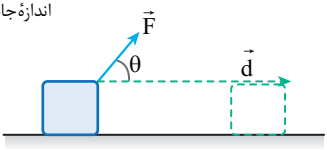
$$\Rightarrow K=0/7\times144\times10^5\,GJ=1/008\times10^7\,GJ$$

## کار انجام‌شده توسط نیروی ثابت

کاری که نیروی ثابت $\vec{F}$ برحسب $(N)$ در یک جابه‌جایی به اندازهٔ $d$ برحسب $(m)$ انجام می‌دهد، برابر است با:

$$W=F\,d\cos\theta$$

$W$: کار $(J)$، $F$: اندازهٔ نیرو $(N)$، $d$: اندازهٔ جابه‌جایی $(m)$، $\theta$: زاویهٔ بین $\vec{d},\vec{F}$



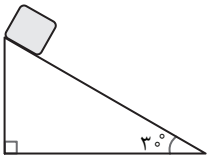

## کار نیروی وزن

کار نیروی وزن بر روی جسمی به جرم $m$ برحسب $(kg)$، در تغییر ارتفاع $\Delta h$ برحسب $(m)$ برابر است با:

$$W_{\text{وزن}}=-mg\Delta h$$

**خواست باشه!** اگر تغییر ارتفاع به سمت بالا باشد $\Delta h > 0$ و اگر به سمت پایین باشد $\Delta h < 0$ است.

**مثال** **مطابق شکل زیر، جسمی به جرم ۸۰۰g از بالای سطح شیبداری رها می‌شود و مسافتی به اندازهٔ ۲/۵m بر روی سطح شیبدار می‌پیماید تا به پایین سطح برسد. کار نیروی وزن در این جابه‌جایی بر روی جسم چند ژول است؟ $(g = 10 \frac{N}{kg})$**




**پاسخ مثال** ابتدا جابه‌جایی عمودی جسم $(\Delta h)$ در این حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{|\Delta h|}{2/5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|\Delta h|}{2/5} \Rightarrow |\Delta h| = 1/25\,m$$

تغییر ارتفاع به سمت پایین: $\Delta h = -1/25\,m$

سپس کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{وزن} = -mg\Delta h \Rightarrow W_{وزن} = -0/8 \times 10 \times (-1/25) = 10\,J$$

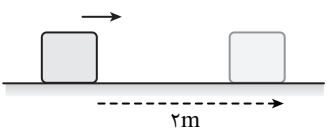
## کار نیروی اصطکاک

وقتی جسمی بر روی یک سطح در حال حرکت است، نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم بر آن وارد می‌شود؛ بنابراین کار انجام‌شده توسط این نیرو برابر است با:

$$W_{\text{اصطکاک}} = -f\,d$$

$f$: اندازهٔ نیروی اصطکاک (N)، $d$: مسافت طی‌شده (m)، $W_{\text{اصطکاک}}$: کار نیروی اصطکاک (J)

**مثال** **مطابق شکل زیر، جسمی را بر روی سطح افقی و مماس بر آن پرتاب می‌کنیم و جسم پس از پیمودن مسافت ۲m متوقف می‌شود. اگر بزرگی نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، ثابت و برابر با ۴N باشد، کار نیروی اصطکاک بر روی جسم در این جابه‌جایی چند ژول است؟**




**پاسخ مثال**

$$W_{\text{اصطکاک}} = -f\,d \Rightarrow W_{\text{اصطکاک}} = -4 \times 2 = -8\,J$$

## کار کل

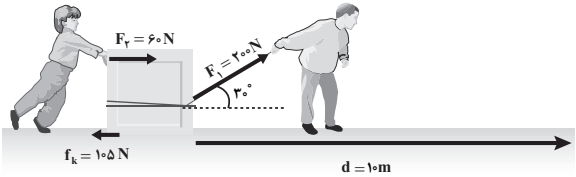
کار کل انجام‌شده بر روی یک جسم را با سه روش زیر می‌توانیم به‌دست آوریم:

۱ با استفاده از کار تک‌تک نیروها: $W_t = W_1 + W_2 + \cdots$

۲ با استفاده از نیروی خالص (برایند): $W_t = F_{net} d \cos\theta$

۳ با استفاده از قضیهٔ کار - انرژی جنبشی: $W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$

**مثال** **شکل زیر، پدر و پسری را در حال جابه‌جاکردن یک جعبهٔ ساکن به جرم ۴۹kg روی سطحی هموار نشان می‌دهد. نیروی $\vec{F}_1$ را پدر و نیروی $\vec{F}_2$ را پسر به جعبه وارد می‌کنند و $\vec{f}_k$ نیز نیروی اصطکاک جنبشی است که با حرکت جعبه مخالفت می‌کند و در خلاف جهت جابه‌جایی به جعبه وارد می‌شود: ($\sqrt{3} = 1/7$)**




**الف) کار کل انجام‌شده روی جعبه در این جابه‌جایی چند ژول است؟**

**ب) تندی حرکت جعبه در انتهای مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

**پاسخ مثال**

**الف** کار تک‌تک نیروها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} W_1 = F_1 d \cos\theta_1 = ۲۰۰ \times ۱۰ \times \cos ۳۰^\circ = ۲۰۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰۰۰\sqrt{۳} = ۱۷۰۰J \\ W_2 = F_2 d \cos\theta_2 = ۶۰ \times ۱۰ \times \cos ۰^\circ = ۶۰۰J \\ W_{f_k} = -f_k d = -۱۰۵ \times ۱۰ = -۱۰۵۰J \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_t = W_1 + W_2 + W_{f_k} = ۱۷۰۰ + ۶۰۰ - ۱۰۵۰ = ۱۲۵۰J$$

**ب** با توجه به قضیهٔ کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow ۱۲۵۰ = \frac{1}{2} \times ۴۹ \times (v_2^2 - ۰)$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{۲۵۰۰}{۴۹} \Rightarrow v_2 = \frac{۵۰}{۷} \frac{m}{s}$$

## انرژی پتانسیل گرانشی

انرژی پتانسیل سامانهٔ متشکل از جسم و زمین برابر است با:

$$U = mgh$$

U: انرژی پتانسیل گرانشی برحسب (J)

m: جرم جسم برحسب (kg)

g: شتاب گرانشی برحسب $(\frac{N}{kg})$

h: ارتفاع جسم از سطح زمین (مبدأ پتانسیل گرانشی) برحسب (m)

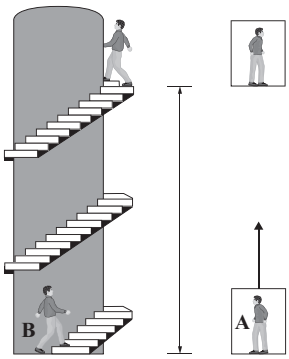
**نکته**

تغییر انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با منفی کار نیروی وزن بر روی جسم و داریم:

$$\Delta U_{\text{گرانشی}} = -W_{\text{وزن}} = mg\Delta h$$

**جواست باشه!** در رابطهٔ بالا اگه تغییر ارتفاع به سمت بالا باشد $\Delta h > 0$ و اگر به سمت پایین باشد $\Delta h < 0$ است.

**مثال** **دو شخص هم‌جرم A و B به طبقهٔ سوم ساختمانی می‌روند. شخص A با آسان‌بَر (آسانسور) و شخص B به آرامی از پله‌های ساختمان بالا می‌روند. عبارت‌های درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.**




**الف) در طبقهٔ سوم، انرژی پتانسیل گرانشی (نسبت به زمین) شخص A از شخص B کمتر است، زیرا آرام‌تر بالا رفته است.**

**ب) در طبقهٔ سوم، انرژی پتانسیل گرانشی (نسبت به زمین) شخص A کمتر از شخص B است، زیرا برای رسیدن به طبقهٔ سوم ساختمان، مسافت کمتری پیموده است.**

**ج) کار نیروی وزن برای هر دو شخص در طول مسیر، یکسان است.**

**د) انرژی پتانسیل گرانشی هر دو شخص در طبقهٔ سوم ساختمان، یکسان است.**

انرژی پتانسیل گرانشی هر دو شخص در طبقهٔ سوم برابر با $U = mgh$ بوده و با هم برابرند؛ بنابراین عبارت‌های (الف) و (ب) نادرست و (د) درست است. از طرفی کار نیروی وزن و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی به مسیر حرکت ربطی ندارد و

برای هر دو شخص کار نیروی وزن و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی، یکسان است؛ بنابراین عبارت (ج) درست است.

$$\Delta U_A = \Delta U_B \ , \ W_{mg_A} = W_{mg_B}$$

## پایستگی انرژی مکانیکی

در شرایطی که نیروهای اتلافی مانند مقاومت هوا و اصطکاک نباشند، انرژی مکانیکی یک جسم (مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشی) در تمام طول مسیر، ثابت می‌ماند و می‌توانیم بنویسیم:

$$E_1 = E_2 \xrightarrow{E=K+U} K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

یا می‌توان گفت: $\Delta K = -\Delta U$

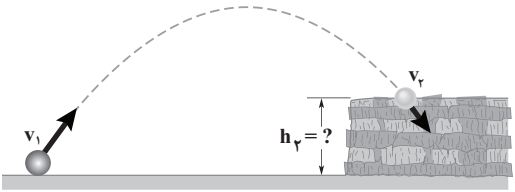
U: انرژی پتانسیل

K: انرژی جنبشی

E: انرژی مکانیکی

**خواست باشه!** در سوالات کنکور، زمانی می‌توانیم از اصل پایستگی انرژی مکانیکی استفاده کنیم که به جز نیروهای وزن، الکتریکی و کشسانی، نیروی دیگری روی جسم کار انجام ندهد.

**مثال** **توپی مطابق شکل از سطح زمین با تندی $v_1 = 40\frac{m}{s}$ به طرف صخره‌ای پرتاب می‌شود. اگر توپ با تندی $v_2 = 20\frac{m}{s}$ به بالای صخره برخورد کند، $h_2$ چند متر است؟ (مقاومت هوا را هنگام حرکت توپ نادیده بگیرید و $g = 10\frac{N}{kg}$)**




**پاسخ مثال**

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = g(h_1 - h_2) \Rightarrow \frac{1}{2} \times (20^2 - 40^2) = 10(0 - h_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(-1200) = -10h_2 \Rightarrow h_2 = 60m$$

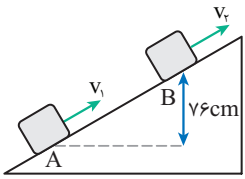
## کار و انرژی درونی

طبق قانون پایستگی انرژی، در شرایطی که نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا وجود دارند، این نیروها بر روی جسم کار انجام می‌دهند و کار آن‌ها سبب افزایش انرژی درونی اجزای تشکیل‌دهندهٔ مجموعه می‌شود؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$W_f = E_2 - E_1$$

یا می‌توانیم بنویسیم: $W_f = \Delta K + \Delta U$

**مثال** **جسمی به جرم $0/45\,kg$ با تندی $v_1 = 8\,\frac{m}{s}$ از نقطهٔ A می‌گذرد (شکل زیر). نیروی مقاومت هوا و نیروی اصطکاک در سطح تماس جسم با سطح، ۲۰ درصد انرژی جنبشی اولیهٔ جسم را تا رسیدن به نقطهٔ B تلف می‌کنند. تندی جسم در نقطهٔ B چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\,\frac{N}{kg})$**




**پاسخ مثال**

$$W_f = \Delta K + \Delta U \xrightarrow[W_f = -\frac{20}{100}K_1]{\Delta U = mg\Delta h} \frac{-20}{100}K_1 = K_2 - K_1 + mg\Delta h$$

$$\Rightarrow -\frac{20}{100}\times\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mg\Delta h$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{100}\times 8^2 = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}\times 8^2 + 10\times 0/76$$

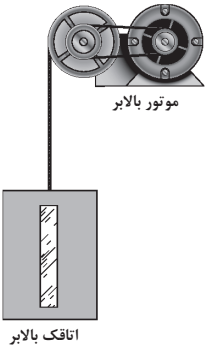
$$\Rightarrow -6/4 = \frac{1}{2}v_2^2 - 32 + 7/6 \Rightarrow v_2^2 = 36 \Rightarrow v_2 = 6\,\frac{m}{s}$$

## توان

توان به معنی آهنگ انجام کار است و توان متوسط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

$P_{av}$: توان متوسط (W)، $W$: کار انجام‌شده (J)، $\Delta t$: مدت‌زمان انجام کار (s)




**مثال** جرم اتاقک بالابری به همراه بار آن ۵۰۰kg است (شکل روبه‌رو). اگر این بالابر در مدت ۱۰s از طبقهٔ همکف به طبقهٔ دوم در ارتفاع ۶m برود، توان متوسط موتور این بالابر چند اسب بخار است؟ ($g = ۱۰\frac{N}{kg}$، نیروهای اتلافی را نادیده بگیرید و یک اسب بخار تقریباً ۷۵۰ وات است.)

**پاسخ مثال** طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی کار کل انجام‌شده روی اتاقک بالابر (شامل کار نیروی وزن و کار نیروی موتور بالابر) برابر تغییر انرژی جنبشی آن است. به این ترتیب داریم:

$$W_t = W_{وزن} + W_{موتور} = K_۲ - K_۱$$

$$\Rightarrow -mg(h_۲ - h_۱) + W_{موتور} = ۰ - ۰$$

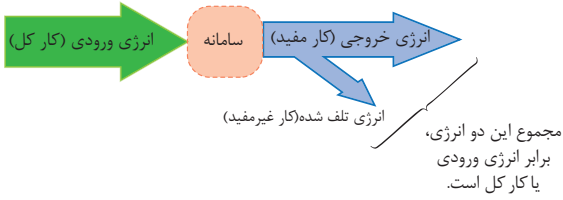
$$\Rightarrow W_{موتور} = mg(h_۲ - h_۱) = ۵۰۰ \times ۱۰ \times ۶ = ۳۰۰۰۰J$$

در محاسبهٔ بالا، مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین (طبقهٔ همکف) گرفته‌ایم. توان متوسط موتور بالابر برابر است با:

$$P_{av} = \frac{W_{موتور}}{\Delta t} = \frac{۳۰۰۰۰J}{۱۰s} = ۳۰۰۰W \times \frac{۱hp}{۷۵۰W} = ۴hp$$

## بازده

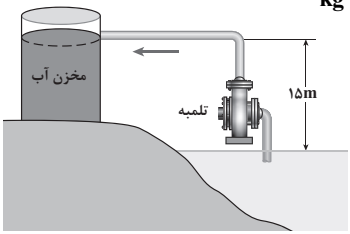
مطابق شکل زیر، هر دستگاه بخشی از انرژی ورودی (مصرفی) را به انرژی موردنظر ما تبدیل می‌کند که به نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی، بازده (Ra) می‌گوییم.




$$\text{بازده} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار کل}} = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}}$$

بازده برحسب درصد = بازده × ۱۰۰

**مثال** تلمبه‌ای با توان ورودی ۱۵kW در هر ثانیه ۷۰L آب دریاچه‌ای به چگالی $۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}$ را مطابق شکل زیر تا ارتفاع ۱۵ متری مخزنی می‌فرستد. بازدهٔ تلمبه چند درصد است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$




**پاسخ مثال** انرژی الکتریکی ورودی به تلمبه برابر است با:

$$E_{\text{ورودی}} = (۱۵۰۰۰W)(۱s) = ۱۵۰۰۰J$$

جرم هر لیتر آب دریاچه ۱kg و کار مفید تلمبه برابر است با:

$$E_{\text{خروجی}} = mg(h_۲ - h_۱) = ۷۰\times۱۰\times۱۵ = ۱۰۵۰۰J$$

در نهایت داریم:

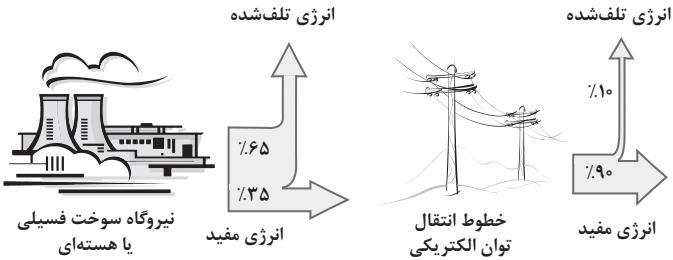
$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{۱۰۵۰۰}{۱۵۰۰۰}\times۱۰۰ = ۷۰٪$$

**نکته**

بازدهٔ کل یک سیستم از ضرب بازدهٔ اجزای آن به‌دست می‌آید.

$$Ra_{\text{کل}} = Ra_۱ \times Ra_۲ \times \cdots$$

**مثال** با توجه به شکل زیر، بازدهٔ کل سیستم تولید و توزیع برق چند درصد است؟




**پاسخ مثال**

$$Ra_{\text{کل}} = Ra_۱ \times Ra_۲ = \frac{۳۵}{۱۰۰}\times\frac{۹۰}{۱۰۰} = \frac{۳۱۵}{۱۰۰۰}$$

$$\text{بازدهٔ کل برحسب درصد} = Ra_{\text{کل}}\times۱۰۰ = \frac{۳۱۵}{۱۰۰۰}\times۱۰۰ = ۳۱/۵ \text{ درصد}$$

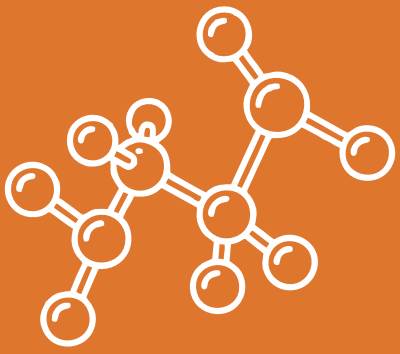
MAZE EDUCATIONAL GROUP
SINCE 1392

ویژهٔ آزمون
۱۵ آبان ۱۴۰۵

# شیمی

## دوازدهم ریاضی

# معجزهٔ شب آزمون



SanjeshCloud

## سلامی‌دوباره به همهٔ کنکوری‌های عزیز

برگشتیم با یه درس‌نامهٔ قشنگ دیگه! این بار قراره وارد فصل دوم شیمی‌دهم بشیم؛ فصلی متنوع و مهم که به‌طور میانگین حدود ۳ تست از کنکور رو به خودش اختصاص میده و ترکیبی از مطالب حفظی، مفهومی‌و مسئله‌ایه.

نیمهٔ اول فصل که توی این آزمون باهاش سروکار داریم، پر از نکات حفظی ساده و جذاب دربارهٔ گازهای مختلفه که با یه مرور درست میتونین به‌راحتی جمعشون کنین. اما در کنارش، سه مبحث مفهومی مهم هم داریم: نام‌گذاری ترکیبات مولکولی و ترکیبات یونی حاصل از فلزات واسطه، ساختار لوویس و درنهایت موازنهٔ واکنش‌های شیمیایی.

پس این درس‌نامه رو با دقت بخونین و نکته‌هاش رو خوب یاد بگیرین تا هم مطالب حفظی رو جمع‌وجور کنین و هم برای آزمون آماده‌تر بشین.

## هواکره

در ابتدا نکات زیر را دربارهٔ هواکره به خاطر بسپارید:

۱ زمین در فضا همانند یک گوی فیروزه‌ای، درون هاله‌ای از گازها در حال چرخش است؛ هاله‌ای که سرشار از هوای پاک بوده و گرمای خورشید را در خود نگه می‌دارد. در میان سیاره‌های سامانهٔ خورشیدی تنها زمین اتمسفری دارد که امکان زندگی را روی آن فراهم می‌کند.

۲ اتمسفر زمین **مخلوطی** از گازهای گوناگون است که تا فاصلهٔ **۵۰۰ کیلومتری** از سطح زمین امتداد یافته است؛ به طوری که می‌توان گفت ما در کف اقیانوسی از مولکول‌های گازی زندگی می‌کنیم. **جاذبهٔ زمین** این گازها را پیرامون خود نگه داشته و مانع خروج آن‌ها از اتمسفر می‌شود.

۳ اگر زمین را به سیب تشبیه کنیم، ضخامت هواکره نسبت به زمین به نازکی پوست سیب می‌ماند. درواقع لایهٔ فیروزه‌ای پیرامون زمین اتمسفر زمین یا همان هواکره است که اغلب هوا نامیده می‌شود.

۴ **اغلب** گازهای موجود در هواکره **نامرئی** هستند؛ به‌طوری که ما هوا را نمی‌توانیم ببینیم و به‌طور معمول وجود آن را حس نمی‌کنیم؛ مگر روزهایی که باد می‌وزد یا در مکان‌هایی که هوا به‌خوبی در جریان است.

۵ میان گازهای هوا **واکنش‌های شیمیایی** گوناگونی رخ می‌دهد که **اغلب** آن‌ها برای ساکنان این سیاره سودمند هستند، اما **برخی** از این واکنش‌ها مفید نبوده و فراورده‌هایی تولید می‌کنند که دلخواه و مطلوب ساکنان سیاره خاکی نیست. برای مثال واکنش‌هایی که منجر به تولید گاز **اوزون** ($O_3$) در لایهٔ **تروپوسفر** هواکره می‌شوند از جمله واکنش‌های **مضر** انجام‌شده در هواکره به شمار می‌روند.

هواکره را براساس روند تغییر دمای آن می‌توان به چهار لایه تقسیم نمود:

| لایه | محدودهٔ ارتفاع (Km) | محدودهٔ دما (°C) (روند تغییر دما با افزایش ارتفاع) | گونه‌های شیمیایی موجود |
|---|---|---|---|
| تروپوسفر | ۰–۱۱/۵ | از ۱۴+ تا ۵۵– (کاهشی) | $H_2O, N_2, O_2, CO_2, O_3$ |
| استراتوسفر | ۱۱/۵–۵۰ | از ۵۵– تا ۷+ (افزایشی) | $N_2, O_2, CO_2, O_3$ |
| مزوسفر | ۵۰–۸۰ | از ۷+ تا ۸۷– (کاهشی) | $N_2, O_2, CO_2, O_3$ |
| ترموسفر | ۸۰–۵۰۰ | از ۸۷– تا ۱۳۰۰+ (افزایشی) | $N_2, O_2, O_2^+, N_2^+, O, O^+, H^+, He^+$ |

ارتباط دمای هواکره با ارتفاع آن:

در لایه‌های اول و سوم ← رابطهٔ معکوس بین دما و ارتفاع ← به‌طورکلی با افزایش ارتفاع، دما کاهش می‌یابد.

در لایهٔ دوم ← رابطهٔ مستقیم بین دما و ارتفاع ← به‌طورکلی با افزایش ارتفاع، دما افزایش می‌یابد.

**نکته**

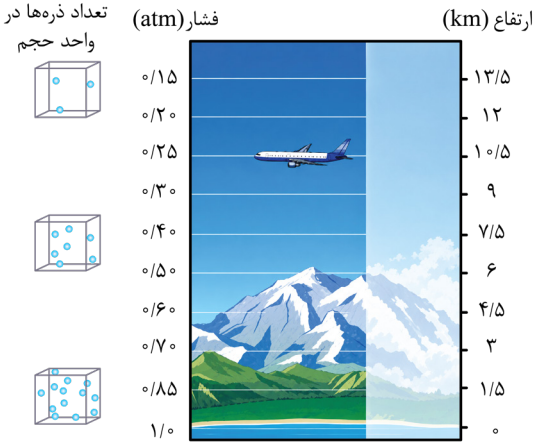
فشار هر گاز ناشی از برخورد مولکول‌های آن با دیوارهٔ ظرف است. هواکره نیز به دلیل داشتن گازهای گوناگون فشار دارد. این فشار در همه جهت ها بر بدن ما و به میزان **یکسان** وارد می‌شود.

- به‌طور کلی با افزایش ارتفاع از سطح زمین تعداد مولکول‌های موجود در واحد حجم کاهش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر فشار هوا با **افزایش** ارتفاع **کم** می‌شود.
- میزان کاهش فشار هواکره در ارتفاعات پایین‌تر بیشتر است؛ اما هرچه ارتفاع بیشتر شود مقدار این کاهش فشار کمتر می‌شود.
- با توجه به تصویر به‌ازای هر ۲ کیلومتر افزایش ارتفاع فشار تقریباً ۰/۸ برابر می‌شود.

**• توجه •**

با افزایش ارتفاع هواکره چگالی مخلوط گازی موجود در هواکره نیز کمتر می‌شود.

■ نمودار زیر نیز روند تغییر فشار در ارتفاعات مختلف از هواکره زمین را نشان می‌دهد:




■ نیتروژن، اکسیژن و کربن‌دی‌اکسید از جمله گازهای موجود در هواکره هستند که در زندگی روزانه نقش حیاتی دارند. حدود ۷۵٪ از **جرم** هواکره در نزدیک‌ترین لایه به زمین (لایهٔ تروپوسفر) قرار دارد.

**• نکته •**

کاربردهای گازهای نیتروژن هلیم و آرگون را با هم اشتباه نکنید! کاربرد این گازها به شرح زیر است:

**گاز نیتروژن:** ۱ پر کردن تایر خودروها ۲ صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی ۳ نگه‌داری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی

**گاز هلیم:** ۱ پرکردن بالن‌های هواشناسی و تفریحی و تبلیغاتی ۲ جوشکاری ۳ پرکردن کپسول غواصی ۴ خنک کردن قطعات الکترونیکی در دستگاه های تصویربرداری پزشکی مانند دستگاه MRI(مهم‌ترین کاربرد)

**گاز آرگون:** ۱ ایجاد محیط بی اثر در جوشکاری ۲ برش فلزها ۳ ساخت لامپ‌های رشته‌ای

برهم‌کنش هواکره با زیست‌کره بیان می‌کند که زندگی جانداران گوناگون در زیست‌کره با گازهای هواکره خورده است. گیاهان با بهره‌گیری از نور خورشید و

مصرف کربن‌دی‌اکسید هواکره اکسیژن مورد نیاز جانداران را تولید می‌کنند. از طرفی جانداران ذره‌بینی موجود در خاک گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت کرده و در اختیار گیاهان قرار می‌دهند.

جدول زیر ترتیب **درصد حجمی**(نه درصد جرمی!) گازهای موجود در یک نمونه از هوای پاک و خشک (فاقد بخار آب) هواکره را نشان می‌دهد.

| گاز | نیتروژن | اکسیژن | آرگون |
|---|---|---|---|
| درصدحجمی | ۷۸/۰۷۹ | ۲۰/۹۵۲ | ۰/۹۲۸ |

| کربن‌دی‌اکسید | نئون | هلیم | کریپتون |
|---|---|---|---|
| ۰/۰۳۸۵ | ۰/۰۰۱۸ | ۰/۰۰۰۵ | ۰/۰۰۰۱ |

**• نکته •**

**نکات مربوط به نام و درصد حجمی‌گازهای سازنده هوای پاک و خشک رو خوبه که حتما به خاطر بسپارید این نکات به شرح زیر هستند:**

۱ مقدار رطوبت موجود در هوا از جایی به جای دیگر و حتی در طول روز متغیر است؛ اما میانگین مقدار بخار آب موجود در هوا در حدود ۱ درصد است.

۲ بخش عمدهٔ هواکره را دو گاز نیتروژن و اکسیژن تشکیل می‌دهد. گاز آرگون در میان اجزای هواکره در رتبهٔ سوم قرار دارد؛ بنابراین می‌توان هوا را منبعی غنی برای تهیهٔ این گازها دانست. در صنعت این گازها را از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع تهیه می‌کنند.

۳ ترتیب فراوانی گازهای نجیب در هواکره از جمله نکات مهم جدول کتاب درسی است. در این رابطه داریم:

آرگون > نئون > هلیم > کریپتون > زنون

۴ توجه داریم که فراوان‌ترین ترکیب گازی موجود در هوای پاک و خشک (نمونه هوا که فاقد بخار آب است) گاز کربن‌دی‌اکسید به شمار می‌رود.

**• نکته •**

بررسی‌های دانشمندان در مورد هوای به‌دام‌افتاده در بلورهای یخ در یخچال‌های قطبی و نیز سنگ‌های آتشفشانی نشان می‌دهد که از ۲۰۰ میلیون سال پیش تاکنون نسبت گازهای سازندهٔ هواکره (درصد حجمی‌گازهای موجود در هواکره) **تقریباً ثابت مانده** است.

## تقطیر جزبه جز هوای مایع

■ از فرایند تقطیر، برای جداسازی اجزای هواکره استفاده می‌شود. روش تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع را می‌توان در چند مرحله به‌صورت زیر نشان داد:

هوا را از صافی‌هایی عبور داده و گرد و غبار آن را می‌گیرند. ← به کمک تغییر فشار، دمای هوا را کاهش می‌دهند. ← در دمای صفر رطوبت هوا به صورت یخ جدا شده و در دمای ۷۸- نیز گاز کربن دی‌اکسید به صورت جامد جدا می‌شود. ← با سرد کردن هوا تا دمای ۲۰۰- درجه سانتی‌گراد مخلوط بسیار سردی از چند مایع پدید می‌آید که به آن هوای مایع می‌گویند. ← با عبور هوای مایع از ستون تقطیر اجزای آن جداسازی و در ظرف‌هایی ذخیره می‌شوند.

■ در مرحلهٔ آخر، فرایند تقطیر شروع به افزایش دمای هوای مایع می‌کنند و هر ماده‌ای که به نقطهٔ جوش خودش برسد، تبدیل به گاز (تبخیر) شده و از مخلوط جدا می‌شود.

**• توجه •**

ترتیب جدا شدن گازها در مراحل افزایش دمای یک نمونه از هوای مایع با دمای $-200^{\circ}C$ به‌صورت نیتروژن ← آرگون ← اکسیژن است.

■ تهیهٔ اکسیژن **خالص** در روش تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع سخت است؛ چون **نقطهٔ جوش** این ماده به نقطهٔ جوش آرگون **نزدیک** است. البته در فرایند تقطیر آرگون را با درصد خلوص بالا **می‌توان** تهیه کرد.

■ آرگون گازی بی‌رنگ بی‌بو و غیرسمی‌است. واژهٔ آرگون به‌معنای تنبل است؛ زیرا این گاز واکنش‌پذیری **ناچیزی** دارد. این گاز در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود. همان‌طور که قبلاً گفتیم آرگون به‌عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری به کار می‌رود.

**• نکته •**

مقدار گازهای نجیب مانند هلیم آرگون کریپتون و زنون در هواکره **بسیار کم** است. از این رو این مواد به گازهای کمیاب نیز معروف هستند.

■ هلیم به‌عنوان سبک‌ترین گاز نجیب، یک مادهٔ بی‌رنگ و بی‌بو است که کاربردهای فراوانی در زندگی دارد.

■ هلیم ($_2He$) در کرهٔ زمین به مقدار خیلی کم یافت می‌شود؛ به‌طوری که مقدار **ناچیزی** از آن در **هوا** و مقدار **بیشتری** از آن در **لایه‌های زیرین پوسته زمین** وجود دارد. به همین خاطر منابع **زمینی** هلیم از هواکره سرشارتر بوده و برای تولید هلیم در مقیاس **صنعتی مناسب‌تر** هستند.

■ هلیم از واکنش‌های **هسته‌ای** در ژرفای زمین تولید می‌شود. این گاز پس از نفوذ به لایه‌های زمین وارد میدان‌های گازی می‌شود. حدود **۷ درصد حجمی‌از** مخلوط گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد. البته توجه داریم که مقدار هلیم در میدان‌های گازی گوناگون **متفاوت** است.

■ چون درصد حجمی‌هلیم در هواکره کمتر از منابع زمینی آن است، پس به دست آوردن هلیم از طریق **تقطیر** هوا **مقرون به صرفه نیست**. البته جداسازی هلیم از گاز طبیعی به دانش و فناوری پیشرفته‌ای نیاز دارد. متخصصان کشورمان تاکنون موفق به جداسازی و تهیه آن **نشده‌اند** و همچنان هلیم از دیگر کشورها **وارد** می‌شود.

تا اینجا، مطالب کلی دربارهٔ گازهای سازندهٔ هواکره را خواندیم. از این به بعد میریم سراغ ویژگی‌های جزئی یکی از عناصر مهم موجود در هواکره. هواکره، یعنی اکسیژن...

## اکسیژن و واکنش سوختن

■ اتم اکسیژن در ساختار همهٔ مولکول‌های زیستی مانند کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها یافت می‌شود. این گاز در **هواکره** نیز به‌طور **عمده** به شکل مولکول‌های دو اتمی $O_2$ وجود دارد. هرچه از سطح زمین فاصله می‌گیریم، **فشار** گاز اکسیژن **کمتر** می‌شود.

■ اکسیژن، گازی واکنش‌پذیر است و با **اغلب** عنصرها و مواد واکنش می‌دهد؛ از این‌رو بخش قابل توجهی از واکنش‌های شیمیایی که روزانه پیرامون ما رخ می‌دهد به‌دلیل وجود گاز اکسیژن در هوا است.

■ آزادسازی انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در مواد غذایی مانند چربی‌ها و قندها در سوخت‌وساز یاخته ای به کمک اکسیژن انجام می‌شود تا به این ترتیب انرژی لازم برای فعالیت‌های بدن فراهم شود. معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده به‌صورت زیر است:

انرژی + آب + کربن‌دی‌اکسید ← چربی‌ها یا قندها + اکسیژن

■ در چراغ پیه (چربی)سوز، واکنش سوختن چربی انجام می‌شود. در چنین شرایطی انرژی شیمیایی به انرژی نورانی و گرمایی تبدیل می‌شود.

■ سوختن، واکنشی شیمیایی است که در آن یک ماده با اکسیژن به‌سرعت واکنش داده و بخشی از انرژی شیمیایی آن به‌صورت گرما و نور آزاد می‌شود. مواد آلی، **برخی** از فلزها و نافلزها می‌توانند در **شرایط مناسب** در واکنش سوختن شرکت کنند.

■ زغال‌سنگ در حضور اکسیژن می‌سوزد و افزون بر تولید گازهای $SO_2$ و $CO_2$ بخار آب و سایر فراورده‌ها مقدار زیادی انرژی نیز آزاد می‌کند. معادلهٔ واکنش انجام‌شده طی این فرایند به صورت زیر است:

نور و گرما + کربن‌دی‌اکسید + گوگرددی‌اکسید + بخار آب ← اکسیژن + زغال‌سنگ

■ به‌طور کلی دو نوع واکنش سوختن وجود دارد که تفاوت آن‌ها در مقدار اکسیژن مصرف‌شده در واکنش است. اگر اکسیژن **کافی** در دسترس باشد، واکنش سوختن به صورت **کامل** انجام می‌گیرد و در آن گاز کربن دی‌اکسید و بخار آب تولید می‌گردد. این در حالی است که اگر مقدار گاز اکسیژن کافی در **دسترس نباشد،** سوختن **ناقص** انجام شده و گاز **کربن‌مونواکسید** یا دوده به **همراه دیگر فراورده‌ها** آزاد می‌شود.

■ رنگ **زرد یا نارنجی** شعله، نشان‌دهندهٔ سوختن **ناقص** بوده و رنگ **آبی** شعله نیز نشان می‌دهد که وسیلهٔ گازسوز به‌درستی کار می‌کند و اکسیژن کافی در محیط واکنش وجود دارد. در چنین شرایطی، مادهٔ سوختنی استفاده‌شده به‌طور **کامل** می‌سوزد. به‌عنوان مثال تصویر مقابل واکنش سوختن کامل و ناقص گاز شهری (که به‌طور عمده از متان تشکیل شده است) را نشان می‌دهد.




**• توجه •**

شعلهٔ حاصل از سوختن کامل گاز شهری در مقایسه با شعلهٔ حاصل از سوختن ناقص آن دمای بالاتری دارد.

■ گاز کربن‌مونوکسید از گاز کربن‌دی‌اکسید ناپایدارتر است. به عبارت دیگر می‌توان گفت گاز کربن‌دی‌اکسید در مقایسه با کربن‌مونوکسید سطح انرژی پایین‌تری دارد. در چنین شرایطی، گاز $CO$ تولیدشده در سوختن ناقص در حضور اکسیژن و در شرایط مناسب دوباره می‌سوزد و به گاز $CO_2$ تبدیل می‌شود. معادلهٔ واکنش مورد نظر به‌صورت $2CO(g)+O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$ است.

■ کربن‌مونوکسید گازی **بی‌رنگ بی‌بو و بسیار سمی** است. **چگالی** این گاز **کمتر** از هوا بوده و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است.

**• نکته •**

میل ترکیبی هموگلوبین خون با گاز کربن‌مونواکسید بسیار زیاد بوده و بیش از **۲۰۰ برابر** اکسیژن است. بر این اساس مولکول‌های گاز CO پس از اتصال به هموگلوبین از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری کرده و باعث مسمومیت می‌شوند و سامانهٔ عصبی فرد را فلج می‌کنند. در چنین شرایطی قدرت هرگونه اقدامی از فرد مسموم گرفته شده و به این ترتیب خفگی باعث مرگ او می‌شود.

■ واکنش‌پذیری زیاد اکسیژن سبب می‌شود تا عناصر فلزی و نافلزی در شرایط مناسب بسوزند. جدول زیر رنگ شعلهٔ حاصل از سوختن چند ماده در حضور گاز اکسیژن را نشان می‌دهد:

| ماده ای که در مجاورت اکسیژن قرار می‌گیرد | رنگ شعله حاصل از سوختن ماده |
|---|---|
| منیزیم | سفید |
| گوگرد | آبی |
| سدیم | زرد |
| آهن | نارنجی |
| لیتیم | قرمز |

## واکنش‌های شیمیایی و قانون پایستگی جرم

■ تغییر شیمیایی **می‌تواند** با تغییر رنگ مزه بو یا آزادسازی گاز، تشکیل رسوب و گاهی ایجاد نور و صدا همراه باشد. جداول زیر برخی از نمادهای استفاده‌شده در واکنش‌های شیمیایی را معرفی می‌کنند.

| نماد | معنا |
|---|---|
| $\rightarrow$ | تولید می‌کند یا می‌دهد. |
| $\xrightarrow{\Delta}$ | واکنش‌دهنده ها بر اثر گرم شدن واکنش می‌دهند. |
| $\xrightarrow{۲۰۰atm}$ | واکنش در فشار ۲۰۰ اتمسفر انجام می‌شود |
| $\xrightarrow{۱۲۰۰^\circ C}$ | واکنش در دمای ۱۲۰۰ درجهٔ سلسیوس انجام می‌شود |
| $\xrightarrow{Pt(s)}$ | پلاتین به‌عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود |

| نماد | معنا |
|---|---|
| (s) | جامد |
| (l) | مایع |
| (g) | گاز |
| (aq) | محلول آبی |

- معادلهٔ واکنش‌ها را به‌طور کلی می‌توان به دو صورت نمادی و نوشتاری نشان داد. معادلهٔ نمادی افزون بر نمایش فرمول شیمیایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها می‌تواند حالت فیزیکی آن‌ها و اطلاعاتی دربارهٔ شرایط واکنش نیز مانند وجود کاتالیزگر را ارائه کند.
- **اغلب** فلزها در طبیعت به شکل ترکیب یافت می‌شوند که بخش قابل توجهی از آن‌ها به شکل اکسید است. برای مثال فلز آلومینیم به‌صورت ترکیب بوکسیت ($Al_2O_3$ به همراه ناخالصی) و فلز آهن به‌صورت هماتیت ($Fe_2O_3$ به همراه ناخالصی) در طبیعت وجود دارد. سیلیسیم نیز یک عنصر شبه‌فلزی است که در طبیعت اغلب به‌صورت اکسید سیلیس یا همان $SiO_2$ یافت می‌شود.
- واکنش زنگ زدن آهن واکنش اکسایش معروفی است که در آن آهن با اکسیژن موجود در هوای مرطوب واکنش داده و زنگ آهن قهوه‌ای‌رنگ را تشکیل می‌دهد. این زنگار متخلخل بوده و سبب می‌شود تا بخار آب و اکسیژن به لایه‌های زیرین آهن نفوذ کنند و باقی‌ماندهٔ فلز را مورد حمله قرار دهد. با گذشت زمان کل وسیلهٔ آهنی مورد نظر دچار **اکسایش و خوردگی** می‌شود.

**• توجه •**

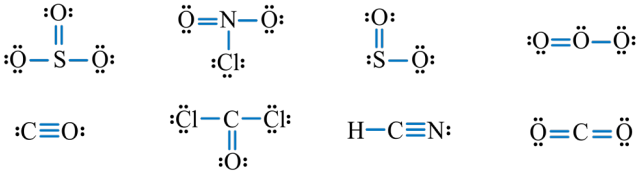
رفتار همهٔ فلزها در برابر اکسیژن **یکسان نیست**. به‌عنوان مثال چون آلومینیم اکسید جامدی با ساختاری متراکم و پایدار است، که محکم به سطح فلز می‌چسبد با تشکیل یک لایه از $Al_2O_3$ بر روی سطح فلز آلومینیم لایه‌های درونی فلز از اثر رطوبت و اکسیژن هوا در امان می‌مانند.

- به واکنش آرام مواد با اکسیژن که با تولید انرژی همراه است، واکنش **اکسایش** می‌گویند. **سرعت** این واکنش در مقایسه با واکنش سوختن **کمتر** است.
- برخی از فلزها در واکنش با اکسیژن چندین نوع اکسید متفاوت تولید می‌کنند. برای مثال فلز آهن با اکسیژن ترکیب و نخست به FeO یا همان آهن (II) اکسید تبدیل می‌شود. در مرحلهٔ بعد این ترکیب با اکسیژن محیط واکنش داده و به $Fe_2O_3$ یا همان آهن (III) اکسید تبدیل می‌شود.

بعد از بحث مربوط به واکنش‌های شیمیایی، میریم سراغ ساختار لوویس ترکیب‌های مولکولی:

## ساختار لوویس

- در آرایش الکترون نقطه‌ای (ساختار لوویس) الکترون‌های لایه ظرفیت اتم‌ها طوری کنار آن‌ها چیده می‌شوند که همهٔ اتم‌های موجود در ترکیب تا حد امکان از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی کنند. ساختار لوویس برخی از ترکیب‌های مولکولی رایج به‌صورت زیر است:



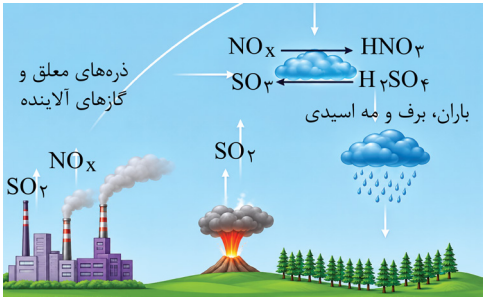
## اکسیدهای فلزی و نافلزی

- به‌طور کلی اکسیدهای حاصل از عناصر **فلزی** را اکسیدهای بازی و اکسیدهای **نافلزی** را اکسیدهای **اسیدی** می‌نامند؛ زیرا از واکنش **اغلب** آن‌ها با آب به‌ترتیب باز و اسید تولید می‌شود.
- توجه داریم که **هر اکسید** نافلزی **لزوماً** خاصیت اسیدی ندارد. به‌عنوان مثال گازهای CO و NO و در آب به‌صورت مولکولی حل می‌شوند و چون با آب واکنش نمی‌دهند، اصلا خاصیت اسیدی ندارند.


SanjeshCloud

اکسیدهای فلزی و نافلزی کاربردها و ویژگی‌های فراوانی در زندگی دارند. به ویژگی‌های زیر از این مواد توجه کنید:

- برخی کشاورزان کلسیم‌اکسید (آهک) را به‌عنوان یک اکسید فلزی برای افزایش بهره‌وری از خاک استفاده می‌کنند. افزودن این نوع مواد به خاک سبب می‌شود تا مقدار و نوع مواد معدنی در دسترس گیاه تغییر کند. کلسیم‌اکسید خاصیت بازی داشته و از آن برای کنترل میزان اسیدی بودن آب دریاچه‌ها نیز استفاده می‌شود.
- با افزایش مقدار کربن‌دی‌اکسید در هواکره بخش زیادی از آن در آب دریاها و اقیانوس‌ها حل می‌شود. این ماده یک اکسید نافلزی با خاصیت اسیدی بوده و با انحلال آن در آب خاصیت اسیدی آب زیاد می‌شود. با اسیدی شدن آب، زندگی برخی از آبزیان به خطر می‌افتد. درواقع با افزایش مقدار گاز $CO_2$ حل‌شده در آب کربنیک‌اسید (یک اسید ضعیف با فرمول شیمیایی $H_2CO_3$) ایجاد می‌شود و این اسید اسکلت آهکی مرجان ها را که گروهی از کیسه‌تنان هستند، نابود می‌کند.
- باران معمولی به‌دلیل وجود کربن‌دی‌اکسید محلول در آن اندکی خاصیت اسیدی داشته و دارای pH کمتر از ۷ است.
- آلاینده‌هایی که از سوختن سوخت‌های فسیلی وارد هواکره می‌شوند و بالا می‌روند. سرانجام باید به زمین برگردند.
- این آلاینده ها به‌طور عمده شامل اکسیدهای اسیدی $NO_2$ و $SO_2$ هستند که هنگام بارش در آب حل می‌شوند. بارشی که خاصیت اسیدی چشم‌گیری دارد و به زمین فرو می‌ریزد. در این حالت می‌گوییم باران اسیدی باریده است. روند تولید باران‌های اسیدی مطابق شکل مقابل است:



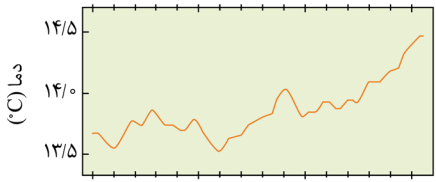

باران عادی و باران اسیدی **هر دو دارای pH کمتر از ۷** هستند، اما باران اسیدی به‌دلیل انحلال گازهای $NO_2$ و $SO_2$ در خود اسیدی‌تر است.

باران اسیدی آثار جبران‌ناپذیری بر جنگل‌ها باغ‌های میوه و زندگی آبزیان دارد؛ زیرا

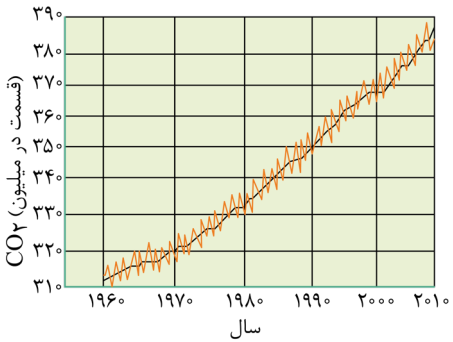
تغییر میزان خاصیت اسیدی آب به بافت‌های جانداران آسیب می‌زند. آثار **زیان‌بار** باران اسیدی بر روی پوست دستگاه تنفس و چشم‌ها **به‌سرعت قابل تشخیص** است. گاهی خاصیت اسیدی باران باعث خشکی و ترک خوردگی پوست بدن نیز می‌شود.

## کربن‌دی‌اکسید و اثر گلخانه‌ای

- شواهد نشان می‌دهند که در طول سدهٔ گذشته، میانگین دمای کرهٔ زمین افزایش یافته است. دانشمندان پیش‌بینی می‌کنند دمای کرهٔ زمین تا سال ۲۱۰۰ بین ۱/۸ تا ۴ درجه سلسیوس افزایش خواهد یافت. نمودار زیر روند تغییر میانگین جهانی دمای هوا را نشان می‌دهد:




- براساس شواهد فصل بهار در نیم‌کرهٔ شمالی به‌دلیل افزایش دمای کرهٔ زمین نسبت به ۵۰ سال گذشته در حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود. آمارها نشان می‌دهند که سالانه میلیاردها تن کربن‌دی‌اکسید به هواکره وارد می‌شود؛ به‌طوری که مقدار این گاز در سدهٔ اخیر در هواکره به میزان قابل توجهی افزایش یافته است. نمودار زیر روند تغییر غلظت گاز کربن‌دی‌اکسید در هواکره را نشان می‌دهد:




- کربن‌دی‌اکسید یک گاز گلخانه‌ای است که نقش بسیار تعیین‌کننده‌ای در آب و هوای کرهٔ زمین دارد. با **افزایش** غلظت این گاز در هواکره و تشدید شدن اثر گلخانه‌ای برف‌های موجود در نیم‌کره‌های زمین آب شده و به دنبال آن، میانگین

جهانی سطح آب‌های آزاد نیز افزایش پیدا می‌کند.

- در اثر سوزاندن سوخت‌های فسیلی انواع آلاینده‌ها وارد هواکره می‌شود. به‌طور مثال، از اگزوز خودرو گازهای $NO_2$ و $SO_2$ (نه گاز گوگردتری‌اکسید) و $CO_2$ و $C_xH_y$ و $CO$ و $NO$ خارج می‌شود.
- انسان به‌دلیل مصرف انرژی الکتریکی مقداری گاز کربن‌دی‌اکسید وارد هواکره می‌کند و درصد گازهای موجود در هواکره را تغییر می‌دهد و بر این اساس بر کرهٔ زمین اثر می‌گذارد. ردپا اصطلاحی است که به این اثر نسبت داده می‌شود.
- **ردپای کربن‌دی‌اکسید** نشان می‌دهد که در تولید یک محصول یا بر اثر انجام یک فعالیت **چه مقدار** از این گاز تولید و وارد هواکره می‌شود.
- هرچه مقدار $CO_2$ وارد شده به طبیعت زیادتر باشد، ردپای ایجادشده سنگین‌تر بوده و اثر آن ماندگارتر خواهد بود؛ زیرا زمان لازم برای تعدیل این اثر به وسیلهٔ پدیده‌های طبیعی همچون فتوسنتز گیاهان طولانی‌تر است.
- یک درخت تنومند سالانه در حدود ۵۰ کیلوگرم کربن‌دی‌اکسید مصرف می‌کند. البته اگر امروز یک نهال بکارید حداقل ۲۰ سال طول می‌کشد تا به یک درخت تنومند تبدیل شود.
- در میان منابع تولید انرژی الکتریکی ترتیب میزان کربن‌دی‌اکسیدی که وارد محیط میشود را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

(باد < گرمای زمین < انرژی خورشید < گاز طبیعی < نفت خام < زغال‌سنگ)

- از میان منابع مختلف مربوط به تأمین انرژی زغال‌سنگ نسبت به سایر موارد بیشترین مقدار گازهای گلخانه ای را تولید می‌کند. از بین این منابع تأمین انرژی با استفاده از باد کمترین مقدار از گازهای گلخانه‌ای را تولید می‌کند.
- گلخانه‌ها زمین‌های کشاورزی ویژه‌ای هستند که دور تا دور آن‌ها را تا ارتفاع معینی با لایه‌ای از پلاستیک‌های شفاف می‌پوشانند و در آن‌ها گیاهان و میوه‌های گوناگونی را پرورش می‌دهند. در گلخانه‌ها در تمام فصول سال به‌ویژه در زمستان فراورده‌های کشاورزی مانند قارچ، خیار، گوجه‌فرنگی، توت‌فرنگی و... کشت می‌شود. درواقع با وجود گلخانه‌ها امکان پرورش میوه‌ها در تمام فصول سال فراهم شده است. گلخانه گیاه یا میوه را از آسیب‌های ناشی از تغییر دما و آفت‌ها حفظ می‌کند.

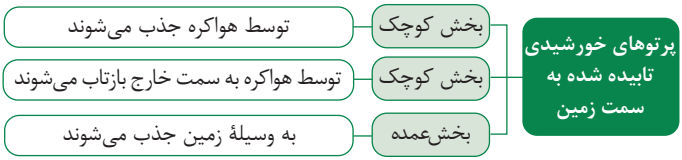
**• نکته •**

تغییرات دمایی در داخل گلخانه ها **برخلاف** بیرون گلخانه دارای نوسان زیادی نبوده و در محدوده ای کوچک تغییر میکند. به‌طور کلی دمای محیط درون گلخانه در مقایسه با محیط خارج گلخانه بالاتر است.

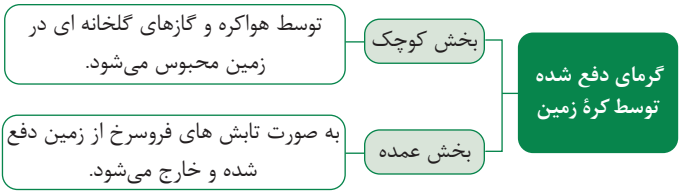
- نور خورشید هنگام گذر از لایه های هواکره با مولکول‌ها و دیگر ذره های آن برخورد کرده و تنها بخشی از آن به سطح زمین می‌رسد. به همین خاطر زمین گرم می‌شود و مانند یک جسم داغ از خود پرتوهای الکترومغناطیس گسیل می‌کند؛ با این تفاوت که انرژی پرتوهای گسیل‌شده کمتر بوده و طول موج آن‌ها بلندتر است.
- کرهٔ زمین با لایه‌ای از گازها به نام هواکره احاطه شده است. این لایه برای زمین همانند لایهٔ پلاستیکی برای گلخانه است و سبب گرم شدن کره زمین می‌شود. به‌طوری که اگر این لایه **وجود نداشت**، کرهٔ زمین سرد شده و میانگین دمای آن به $-18^{\circ}C$ **کاهش** می‌یافت.
- پرتوهای خورشیدی پس از برخورد به زمین دوباره با طول موج‌های بلندتر به هواکره برمی‌گردند، اما برخی گازهای موجود در هواکره مانند $CO_2$ و $H_2O$ و... مانع خروج آن‌ها می‌شوند و به این ترتیب زمین را گرم‌تر می‌کنند.
- تصویر زیر مبادلهٔ حرارتی کره زمین را نشان می‌دهد.




مطابق تصویر، سرنوشت پرتوهای خورشیدی تابیده شده به‌سمت زمین به‌صورت زیر است:




بخش **کوچکی** از پرتوهای خورشیدی تابیده‌شده به‌سمت زمین به‌وسیلهٔ هواکره جذب می‌شوند. پرتوهای جذب‌شده توسط زمین باعث گرم شدن کرهٔ زمین می‌شوند. سرنوشت این گرمای جذب‌شده نیز به‌صورت زیر است:



**و اما می‌رسیم به بخش شیمی دوازدهم آزمون!**

خوشبختانه بخش شیمی دوازدهم این آزمون کلاً در کتاب درسی چند صفحه بیشتر نیست و مطالب مفهومی و حفظی خاصی نداره؛ ولی یکی از مهم‌ترین بخش‌های مسائل کنکور یعنی مسائل pH مربوط به‌این بخشه که به‌طور میانگین هر سال ۲ تست در کنکور داره و باید تیپ‌های مختلفش رو آنقدر به‌صورت روتین روزانه تمرین کنید تا بهش مسلط بشید. در نهایت هم مطالعهٔ درس‌نامهٔ مختصر این مبحث، خالی از لطف نیست...

(البته اگه دوست دارین مفاهیم و مبانی اسیدها و بازها رو قبل از مطالعهٔ این بخش مرور کنین، به معجزهٔ شب آزمون ۱ آبان مراجعه کنید.)

- خاصیت اسیدی یا همان میزان اسیدی بودن یک محلول، به غلظت یون هیدرونیوم ($H^+$) در آن بستگی دارد؛ به‌طوری که هرچه غلظت یون هیدرونیوم محلول **بیشتر** باشد، محیط **اسیدی‌تر** است و برعکس.
- به‌دلیل غلظت کم یون هیدرونیوم در محلول‌ها، برای سادگی استفاده از این غلظت می‌توان از کمیت pH استفاده کرد.
- کمیت pH در واقع همان منفی لگاریتم غلظت مولار یون هیدرونیوم است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$pH = -\log[H^+]$$

- برای محاسبهٔ غلظت یون هیدرونیوم در یک محلول با pH مشخص، از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$۱۰^{-pH} = [H^+]$$

- در جدول زیر، محدودهٔ pH محیط در بعضی از قسمت‌های بدن را مشاهده می‌کنیم:

| روده | خون | بزاق دهان | معده در حالت فعالیت |
|---|---|---|---|
| ۸/۵ | ۷/۴ | ۷/۱ تا ۵/۲ | ۱/۸ تا ۱/۶ |

- گسترهٔ تغییر pH در محلول‌های آبی و در دمای اتاق از ۰ تا ۱۴ است.

**خواست باشه!** که در سامانه‌های خنثی رابطهٔ $[H^+]=[OH^-]$ برقرار است.

**نکته**

آب خالص، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد و جریان الکتریسیته را به‌مقدار کمی از خود عبور می‌دهد. این ویژگی بیانگر وجود مقدار بسیار کمی از یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید است. در دمای اتاق، برای آب و محلول‌های آبی، رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$$[H^+]\times[OH^-] = ۱۰^{-۱۴}$$

چون در حل مسائل pH به لگاریتم‌گیری نیاز داریم، یه مروری بر قواعد لگاریتم هم داشته باشیم:

$\bullet \log a^n = n.\log a \quad \bullet \log a.b = \log a + \log b \quad \bullet \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

توجه داریم که طراحان کنکور، ممکن است مقدار لگاریتم اعداد مختلف را در سؤالات مربوط به محاسبهٔ pH محلول‌ها ندهند؛ پس حتماً مقدار لگاریتم عددهای زیر را به خاطر بسپارید.

$\bullet \log ۲ = ۰/۳ \quad \bullet \log ۳ = ۰/۵ \quad \bullet \log ۵ = ۰/۷ \quad \bullet \log ۷ = ۰/۸۵$

مسائل pH هم به‌صورت مستقل و هم‌ترکیب با مسائل درجهٔ یونش و ثابت یونش مورد سؤال قرار می‌گیرند. همچنین ممکن است در ترکیب با سایر بخش‌های مسائل شیمی مثل مسائل محلول، استوکیومتری، سینتیک و... به‌کار روند که در اینجا چند تیپ اصلی از این مسائل را بررسی می‌کنیم.

ساده‌ترین تیپ مسائل، محاسبهٔ pH از روی غلظت یون هیدرونیوم است:

**۱- در یک محلول اسیدی با حجم ۴۰۰ میلی‌لیتر، مقدار $۲\times۱۰^{-۳}$ مول یون هیدروژن وجود دارد. مقدار pH این محلول چقدر می‌شود؟**

۱) ۲/۳ ۲) ۲
۳) ۲/۷ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ «۱»

در قدم اول، غلظت یون هیدروژن را محاسبه می‌کنیم.

$$[H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۰۰۲\text{mol}}{۰/۴\text{L}} = ۰/۰۰۵\text{mol.L}^{-۱}$$

در قدم بعد، مقدار pH محلول موردنظر را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(۵\times۱۰^{-۳}) = -\log(۵) + \log۱۰^{۳}$$
$$= -۰/۷ + ۳ = ۲/۳$$

در تیپ بعدی به سراغ مسائل ترکیبی با درصد یونش می‌رویم:

**۲- مقدار pH محلول ۰/۲۵ مولار هیدروسیانیک اسید برابر ۲/۳ است، درصد یونش اسید در محلول کدام است؟**

۱) ۰/۲ ۲) ۲
۳) ۰/۴ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول را حساب می‌کنیم:

$$pH = ۲/۳ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۲/۳} = ۱۰^{۰/۷} \times ۱۰^{-۳} = ۵\times۱۰^{-۳}\ \text{mol.L}^{-۱}$$

با توجه به غلظت اسید و غلظت یون هیدرونیوم، درجهٔ یونش این اسید برابر است با:

$$\text{درجهٔ یونش} = \frac{[H^+]}{[HA]} = \frac{۵\times۱۰^{-۳}}{۲۵\times۱۰^{-۲}} = ۰/۰۲ \Rightarrow \text{درصد یونش} = \text{درجهٔ یونش} \times ۱۰۰ = ۲٪$$

تیپ سوم مسائل ترکیبی با رابطه ثابت یونش است:

**۳- مقدار pH محلول ۰/۱ مولار اسید HA با ثابت یونش $۴\times۱۰^{-۵}$ مول بر لیتر، کدام است؟**

۱) ۳/۷ ۲) ۲/۷
۳) ۳/۳ ۴) ۲/۳

پاسخ: گزینهٔ «۲»

با توجه به ثابت یونش اسید مورد نظر، غلظت یون هیدرونیوم را در این محلول محاسبه می‌کنیم.

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \sqrt{۰/۱\times۴\times۱۰^{-۵}} = ۲\times۱۰^{-۳}$$

در مرحلهٔ بعد، با توجه به غلظت یون هیدرونیوم، pH محلول موردنظر را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH = -\log(۲\times۱۰^{-۳}) = ۲/۷$$

درنهایت تیپ تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی را داریم:

**۴- به ۹۰ میلی‌لیتر آب، چند میلی‌لیتر محلول سود با pH = ۱۳/۷ باید افزوده شود تا pH = ۱۲/۷ گردد؟**

۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ «۲»

**تکنیک حل** اگر حجم محلول باز قوی در اثر رقیق شدن، n برابر شود، pH محلول به‌اندازهٔ $\log n$ کمتر می‌شود.

$$\text{میزان کاهش pH} = ۱۳/۷ - ۱۲/۷ = ۱ = \log n$$

$$\Rightarrow n = ۱۰$$

اگر حجم محلول اولیه را x میلی‌لیتر در نظر بگیریم، حجم محلول رقیق‌شده برابر ۱۰x میلی‌لیتر است؛ بنابراین:

$$x + ۹۰ = ۱۰x \Rightarrow x = ۱۰mL \text{ (محلول اولیهٔ سود)}$$

# معجزهٔ هدف گذاری؛
# پیشرفت برق آسا در ۱۴ روز

از هدف گذاری تا یادگیری، مرور و پیشرفت



۱ **هدف کوچک، مسیر روشن**

با بودجه‌بندی آزمون، هدف این دو هفته‌ات رو مشخص کن.

۲ **برنامه‌ای برای حرکت**

با برنامه مطالعاتی ماز پیش برو یا برنامه شخصی خودت رو بساز.

۳ **یادگیری، هرجا نیاز داری**

در بخش کلاس‌ها، آموزش صفر تا صد مباحث رو ببین.

۴ **چهارشنبه، دو هفته مطالعه؛ یک روز مرور**

با جزوهٔ معجزه شب آزمون، مباحث رو فشرده جمع‌بندی کن.

۵ **پنج‌شنبه؛ تمرین قبل از رقابت**

پیش‌آزمون تراز: سؤالات کنکور و منتخب سؤالات ماز

۶ **جمعه؛ جایگاهت رو بشناس**

در آزمون اصلی، رتبه و ترازت رو بین شرکت‌کنندگان سراسر کشور ببین.

۷ **کارنامه؛ نقشهٔ قدم بعدی**

نقاط قوت و ضعف رو بشناس و برای رسیدن به لیگ بالاتر هدف بذار.

**هر آزمون، شروع یک قدم حساب‌شده‌تر**

رفع اشکال کن و برای دو هفتهٔ بعد، دقیق‌تر برنامه بریز.

SanjeshCloud